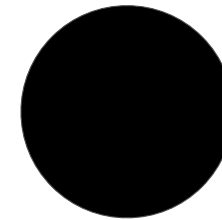


Schwarzschild et trous noirs

PLAN

- Espace de Rindler
- Métrique de Schwarzschild
- Horizon du trou noir
- Derrière l'horizon
- Extension maximale
- Diagrammes de Penrose
- Formation d'un trou noir
- Zoologie



Bon d'accord, l'énergie-impulsion courbe l'espace. Mais à son tour, la géométrie affecte le mouvement, jusqu'à pouvoir l'emprisonner.

Espace de Rindler

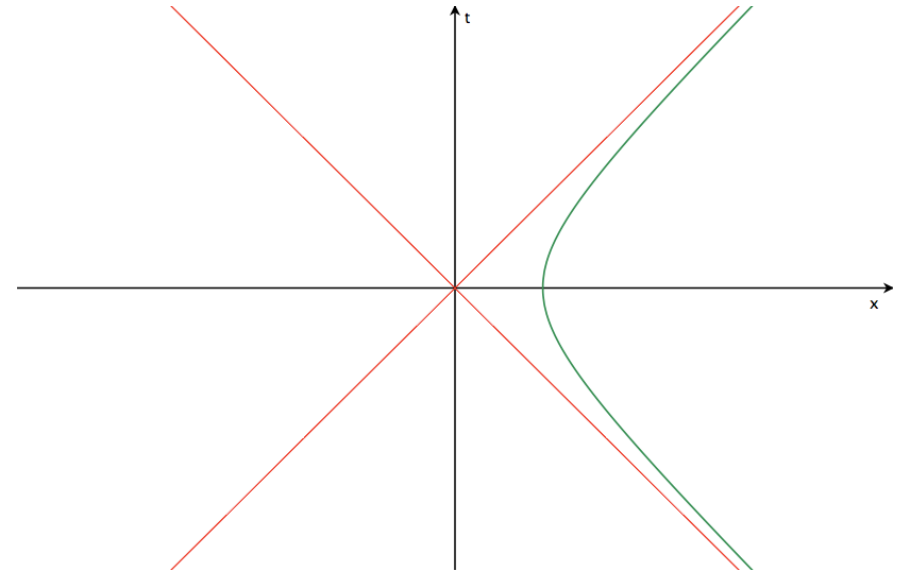
L'espace de Rindler est le petit nom du référentiel uniformément accéléré en relativité restreinte, il va nous permettre de comprendre les trous noirs (en tout cas, c'est l'objectif).

Concrètement, le référentiel de Rindler est celui d'une baguette rigide graduée régulièrement et uniformément accélérée, chaque graduation correspondant à un observateur.

Alors qu'en physique Newtonienne, un observateur au repos dans un référentiel uniformément accéléré parcourt des paraboles dans l'espace-temps. En relativité restreinte, il parcourt des **hyperboles** d'équation :

$$x^2 - t^2 = \rho^2$$

où ρ est une constante donnant la distance de l'observateur à l'origine quand $t=0$.



Mouvement uniformément accéléré dans un espace-temps de Minkowski :

La quadriaccélération s'écrit (cf. **Ch 2 Section 4**) :

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$$

Dans un espace plat, $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0$

$$\text{et donc } u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Supposons maintenant qu'un observateur soit soumis à une accélération de norme constante ($a^\mu a_\mu = a^2 = \text{cste}$).

Comme $u^\mu u_\mu = 1$ (la norme de la quadrivitesse est invariante et on a pris $c = 1$), on a alors :

$$u^0 = \sqrt{1 + (u^x)^2}.$$

$$\text{D'où } du^0/d\tau = \frac{2u^x du^x/d\tau}{2\sqrt{1+(u^x)^2}} = \frac{u^x du^x/d\tau}{\sqrt{1+(u^x)^2}}$$

On remplace dans $a^\mu a_\mu$ (a^μ , orthogonale à u^μ est de type espace, sa norme est donc $-(a^0)^2 + (a^x)^2$) :

$$a^\mu a_\mu = -\frac{(u^x)^2 (du^x/d\tau)^2}{1+(u^x)^2} + (du^x/d\tau)^2 = \frac{(du^x/d\tau)^2}{1+(u^x)^2} = a^2$$

d'où on tire :

$$\frac{1}{\sqrt{1+(u^x)^2}} \frac{du^x}{d\tau} = a$$

En séparant les variables et en intégrant membre à membre, on obtient la vitesse :

$$\frac{du^x}{\sqrt{1+(u^x)^2}} = a d\tau$$

$$\Rightarrow \sinh^{-1}(u^x) = a\tau \text{ et donc } u^x = \sinh a\tau$$

$$\text{et comme } u^0 = \sqrt{1+(u^x)^2}, u^0 = \cosh a\tau$$

Après une nouvelle intégration, on obtient finalement les coordonnées de notre observateur uniformément accéléré :

$$\begin{cases} t = \frac{1}{a} \sinh a\tau \\ x = \frac{1}{a} \cosh a\tau \end{cases}$$

On constate donc bien que sa ligne d'univers dessine des hyperboles $x^2 - t^2 = \frac{1}{a^2}$ éloignées de la distance $\rho = \frac{1}{a}$ de l'origine. Et en rétablissant c , cela donne $\rho = c^2/a$.

Les plus fortes accélérations sont près de l'origine. Pour retrouver l'accélération de la pesanteur terrestre, il faut s'éloigner de $c^2/g \approx 10^{16}$ m, une petite année-lumière...

Pourquoi des hyperboles ? Le cône de lumière est une limite indépassable pour l'observateur puisque la vitesse du référentiel (la fusée si on veut) ne peut dépasser c . Ce sont ces deux asymptotes (futur et passé) qui transforment nos vieilles paraboles en hyperboles.

Plus rigoureusement, on veut que les observateurs mesurent en permanence la même distance entre eux dans leur référentiel propre instantané (ils continuent à voir la même baguette...). Et même distance pour des observateurs en mouvements signifie distance invariante de Lorentz. Cette distance ne peut donc qu'être proportionnelle au temps propre $x^2 - t^2$ pour demeurer inchangée. Et voilà comment on se retrouve avec des hyperboles... L'invariance de Lorentz impose des hyperboles de la même façon que l'invariance par rotation impose des cercles.

Et sur le modèle du cercle et de ses coordonnées polaires, on peut paramétrer les hyperboles de façon à faire apparaître leur isochronisme :

$$\begin{cases} x = \rho \cosh(\omega) \\ t = \rho \sinh(\omega) \end{cases}$$

Ces coordonnées hyperboliques sont donc, dans un espace de Minkowski, l'analogue des coordonnées polaires pour le plan (x, y) . ω remplace θ et représente le temps ressenti par l'observateur uniformément accéléré, les plans $\omega = cste$ étant les plans de simultanéité entre l'observateur en $(0,0)$ et les autres.

Un référentiel uniformément accéléré en relativité restreinte est l'analogue d'un référentiel en rotation uniforme dans un espace euclidien !

Petite bizarrerie :

Si elle est bien uniforme dans le temps, l'accélération propre de chaque observateur (chaque point de la baguette) varie en fonction de la position sur la baguette ! Elle devient de plus en plus grande au fur et à mesure que l'on s'approche de l'origine $\rho=0$, jusqu'à diverger.

Pas le choix, si on veut garder une distance fixe entre les observateurs.

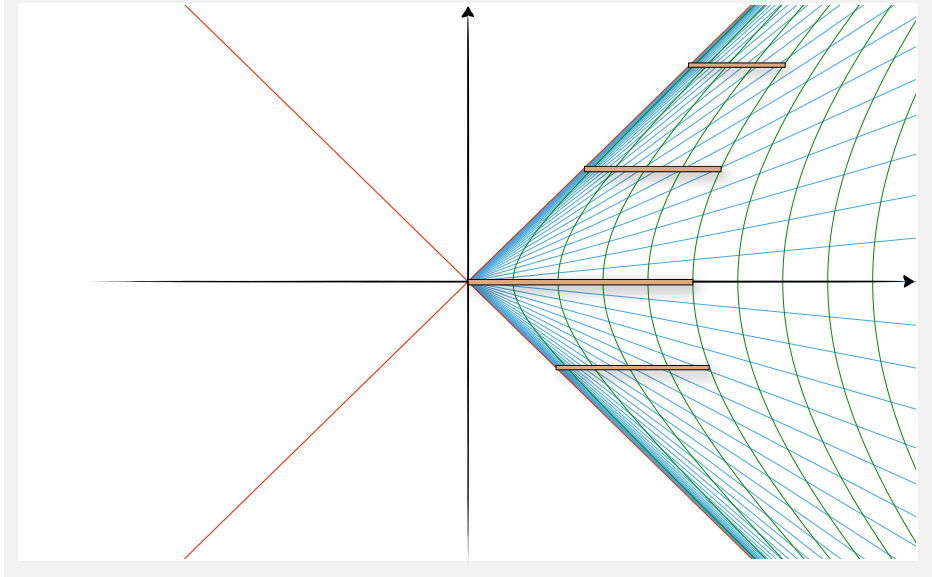
Comme l'a montré le 1^{er} cadre grisé, l'accélération propre de chaque observateur est en $1/\rho$. Et on s'en convainc graphiquement en comparant les courbures sur les différentes hyperboles. Tels des cercles concentriques (analogue on vous dit), les hyperboles intérieures sont plus courbées...

Cela vient de la contraction des longueurs ! La queue de la baguette est accélérée plus fort, car elle se rapproche de la tête au fur et à mesure que la vitesse augmente pour garder une taille propre fixée.



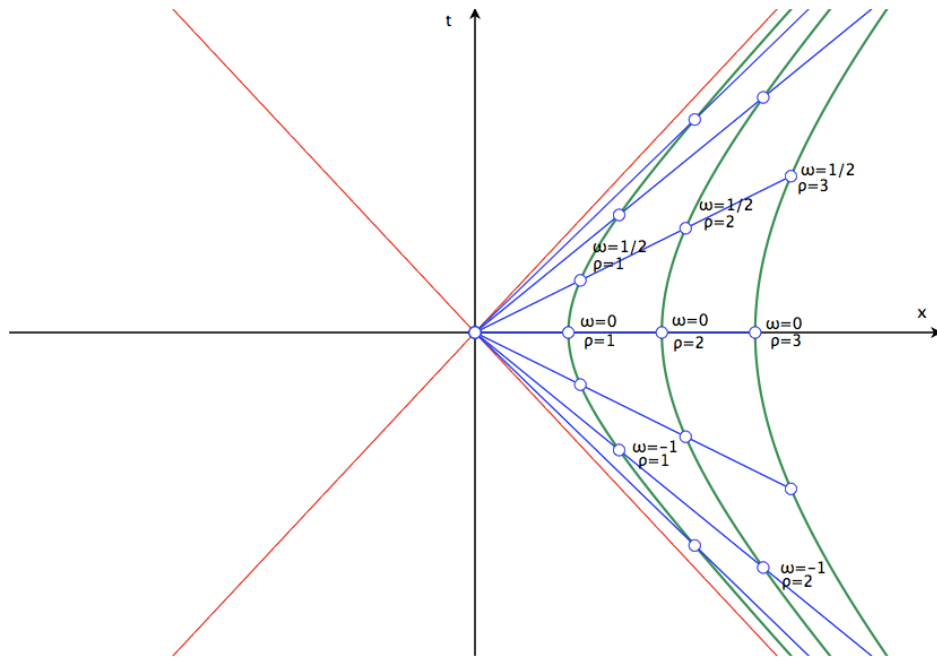
Ce rapprochement entre référentiel accéléré et coordonnées polaires n'est donc pas si étonnant puisque :

- accélération (non uniforme dans l'espace) = courbure,
- et courbure = rotation...



Un référentiel uniformément accéléré se déduit du paramétrage de la trajectoire :

- On crée la grille des x en faisant varier régulièrement la constante ρ ($\rho=1, \rho=2, \dots$).
- Pour le temps, on découpe en ω constant et on obtient des droites passant par l'origine et de plus en plus serrées au fur et à mesure qu'on se rapproche de $x=t$ (donc de $v=c$).



On peut maintenant chercher la métrique d'espace-temps :

$$\begin{cases} dx = \cosh(\omega)d\rho + \rho \sinh(\omega)d\omega \\ dt = \sinh(\omega)d\rho + \rho \cosh(\omega)d\omega \end{cases}$$

d'où :

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = \rho^2 d\omega^2 - d\rho^2$$

Cet espace ainsi défini a un petit nom : **l'espace de Rindler**.
Et le temps ω à droite à temps de Rindler.

Autre bizarrerie :

Le grand message de la relativité générale, courbure = champ gravitationnel, semble ignoré dans le cas présent. En

effet, l'espace de Rindler n'est à première vue qu'une redéfinition du plan type Minkowski (via le changement de coordonnées ci-dessus). Or cet espace plat, référentiel inertiel, ne devrait connaître que des champs gravitationnels uniformes (spatialement) et pourtant l'accélération, donc le champ, dépend ici de la position de l'observateur.

La clé du mystère se trouve dans la divergence des coordonnées. Une partie de l'espace de Rindler (certes riquiqui), à savoir l'origine $\rho=0$ épousant le cône de lumière, n'a pas d'équivalent dans l'espace de Minkowski. Comme pour l'origine $r=0$ dans les coordonnées polaires, la courbure est concentrée dans cette divergence !
Et dans l'espace de Rindler, tous les observateurs uniformément accélérés sont projetés vers cette origine...

Retour dans l'ascenseur :

Prenons le ρ situé à une année-lumière de l'origine pour se retrouver avec l'hyperbole correspondant à l'accélération de la pesanteur terrestre et donnons-lui un nom pour le distinguer : R . Le voisinage immédiat de cette hyperbole, petite portion de l'espace de Rindler, doit pouvoir décrire une chute libre sur Terre. En effet, l'observateur uniformément accéléré est alors placé dans un ascenseur subissant une accélération constante g et par principe

d'équivalence, cela doit correspondre à la pomme qui tombe de l'arbre...

Appelons h le petit écart à R . L'observateur est donc en

$\rho = R + h$. La métrique devient alors :

$$\begin{aligned}d\tau^2 &= (R + h)^2 d\omega^2 - d(R + h)^2 \\ &= (R^2 + 2Rh + h^2) d\omega^2 - dh^2 \\ &= (1 + 2h/R + h^2/R^2) R^2 d\omega^2 - dh^2\end{aligned}$$

Dans notre cas, h^2/R^2 est tout à fait négligeable puisqu'on prend un écart h inférieur à la dizaine de km alors que R mesure une année-lumière...

$$d\tau^2 = (1 + 2h/R) R^2 d\omega^2 - dh^2$$

Et en posant $R\omega = t$, on se retrouve avec :

$$d\tau^2 = (1 + 2h/R) dt^2 - dh^2$$

Or on a vu au **chapitre précédent** que dans le cas de faibles vitesses (par rapport à c) et d'un espace presque plat (faible accélération), comme c'est le cas ici, $g_{00} = cste + 2\phi$ ce qui donne comme potentiel gravitationnel dans notre ascenseur :

$$\phi = h/R = gh$$

On a bien retrouvé le potentiel gravitationnel uniforme du voisinage immédiat de la surface terrestre !

Le référentiel de Rindler permet d'appréhender la notion d'**horizon des évènements** :

imaginons que l'observateur uniformément accéléré lâche un caillou sur son chemin. Le caillou va continuer d'avancer à vitesse constante, sa trajectoire dans l'espace-temps est une droite (tangente à la ligne d'univers de l'observateur au

moment du lâcher) qui va couper le cône de lumière à un instant donné.

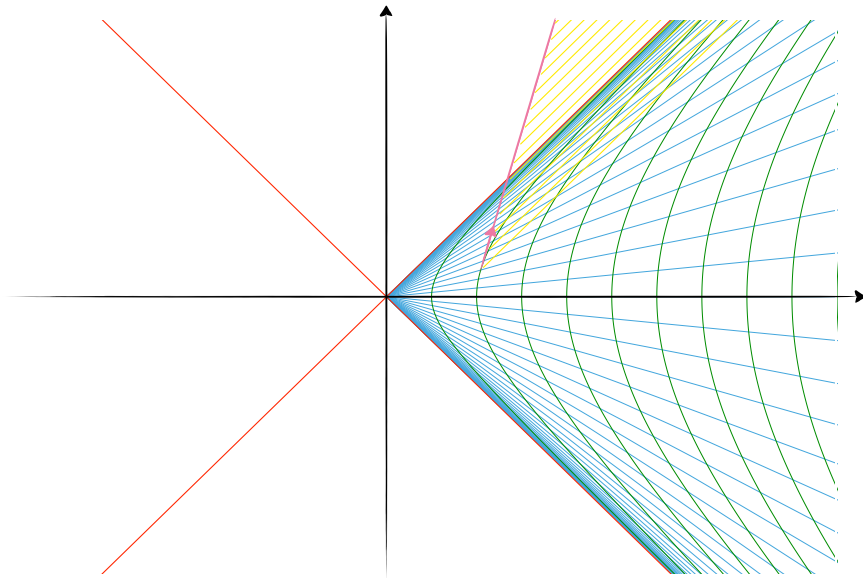
Mais pour l'observateur accéléré, le caillou ne dépasse jamais le cône de lumière ! En effet, pour lui, il coupera l'axe $x=t$ pour $\omega=+\infty$. Plus l'observateur se rapproche du cône de lumière et plus le caillou lui paraît ralentir son mouvement, la lumière qu'il envoie est de plus en plus décalée vers le rouge, et par contraction de Lorentz, le caillou est écrasé dans la direction x . À la limite, sur le cône de lumière, le caillou lui paraîtrait immobile, le temps de l'observateur s'étant figé.

Pour le caillou, pas de soucis (si tant est qu'il puisse en avoir), il dépasse le cône de lumière à un instant donné et continue d'avancer tranquillement. Il voit l'observateur s'éloigner à une vitesse de plus en plus proche de c . Mais l'observateur, lui, ne verra jamais le caillou à cet endroit. De son point de vue, il est piégé à l'extérieur du cône de lumière, le caillou ne dépasse jamais l'horizon (appelé horizon de Rindler ou horizon de l'accélération).

Cet espace agit donc comme une sorte de filtre, de membrane à sens unique : tous les instants passés à l'intérieur du cône de lumière pour le caillou sont invisibles pour l'observateur alors qu'aucun instant vécu par l'observateur n'est invisible pour le caillou...

Le caillou lâché évolue dans un référentiel inertiel avec une trajectoire en ligne droite dans l'espace plat (x,t) . Qu'il traverse sans encombre le cône de lumière montre bien que

son statut particulier dans l'espace de Rindler (origine divergente) n'est qu'affaire de coordonnées et donc d'observateurs bien particuliers (uniformément accélérés).



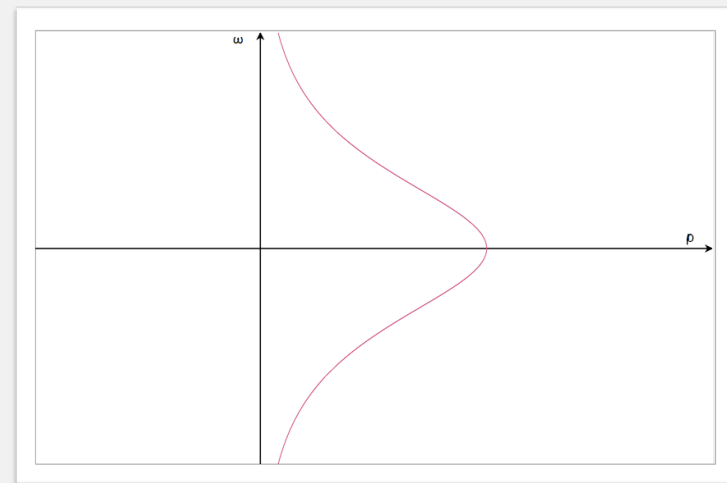
Dans le graphique ci-dessus, le caillou est lâché à $\omega=3/10$ sur l'hyperbole $\rho=2$. Sa trajectoire est tracée en rose. Supposons qu'il envoie des signaux lumineux réguliers (pour lui), tracés en jaune. Le signal émis au moment de traverser le cône de lumière n'atteint jamais l'hyperbole de l'observateur (enfin si, mais en un temps infini). C'est en cela que le cône de lumière est pour l'observateur accéléré un horizon indépassable.

Remarque :

Quelle est l'allure d'une géodésique en coordonnées (ρ, ω) ? Tout d'abord, l'espace de Rindler est un espace-temps plat, donc les géodésiques sont des droites en coordonnées cartésiennes.

Ces droites coupent le cône de lumière ($\rho=0$) pour des valeurs infinies de ω . Et par contre, elles croisent une valeur maximum de ρ pour $\omega=0$.

On a donc l'allure ci-dessous pour la géodésique :



Métrie de Schwarzschild

Il est temps d'étudier les solutions de l'équation d'Einstein. C'est une équation sur les métriques, les solutions sont donc des métriques. Une en particulier va nous intéresser : celle correspondant à une distribution sphérique de masse, en dehors de la distribution. C'est en effet la situation la plus courante : environnement d'un caillou (quelle que soit sa taille et sa densité).

Cette métrie, solution de l'équation d'Einstein sans source ($T^{\mu\nu}=0$) en symétrie sphérique, s'appelle **métrie de Schwarzschild**. Nous allons rapidement nous apercevoir que cette métrie décrit également les trous noirs...

En physique newtonienne, la solution des équations de la dynamique pour une masse ponctuelle se généralise à toute distribution de masse sphérique, du moment qu'on regarde à l'extérieur. C'est encore vrai en relativité générale, une

distribution sphérique peut être assimilée à une masse concentrée en un point au centre de la distribution. C'est le **théorème de Birkhoff**. Mais ça devient : «pour toute distribution sphérique d'énergie bornée, la métrie à l'extérieur est exactement celle d'un trou noir».

Remarque : le théorème de Birkhoff dit en réalité que toute solution à symétrie sphérique des équations du champ vide est stationnaire et asymptotiquement plate. Cela suffit à les identifier de façon univoque à la métrie de Schwarzschild.

Conclusion : la métrie du trou noir est l'analogue de la métrie d'une particule ponctuelle sous Newton.
Mais c'est quoi cette métrie du trou noir ?

Quelques éléments pour comprendre la forme de la métrie : partons d'abord d'un espace-temps plat :

$$d\tau^2 = dt^2 - ds^2$$

et écrivons la partie spatiale en coordonnées sphériques :

$$d\tau^2 = dt^2 - (dR^2 + R^2 d\Omega^2)$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

avec θ la colatitude et Φ l'angle azimutal.

Pour passer de cet espace plat (vers lequel doit tendre la métrie) à un espace courbé, rappelons-nous que dans le cas d'un champ faible :

$$g_{00}(x) = 2\phi(x) + c$$

où Φ est le champ Newtonien créé par la distribution :

$$\phi = -\frac{GM}{R}$$

d'où :

$$g_{00} = c - \frac{2GM}{R}$$

Et comme g_{00} doit tendre vers 1 quand R devient infini, on en conclut $c = 1$.

D'autre part, en trifouillant les équations données par $R^{\mu\nu}=0$ (on est dans le vide), on trouve que g_{rr} vaut l'inverse de g_{00} et on obtient finalement :

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{R}} dR^2 - R^2 d\Omega^2$$

métrie de Schwarzschild

Et en rétablissant la vitesse de la lumière :

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)} dR^2 - \frac{R^2}{c^2} d\Omega^2$$

Voilà donc l'espace créé par une distribution sphérique de charge !

On constate que $d\tau^2$ tend comme convenu vers un espace plat quand $R \rightarrow \infty$. Jusque là tout va bien...

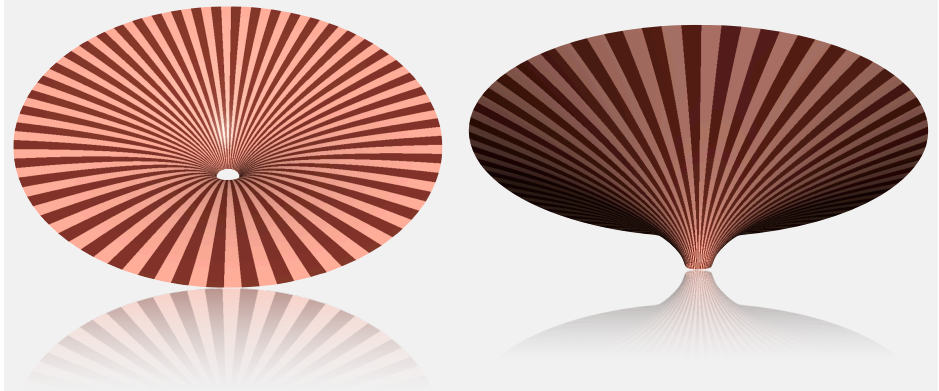
Bien qu'on ait obtenu cette métrie dans l'approximation de champ faible, on peut très bien, moyennant des calculs plus lourds, aboutir à une forme similaire en partant de

considérations générales : univers statique, à symétrie sphérique et dans le vide. On obtient alors :

$$d\tau^2 = K \left(1 + \frac{1}{Sr}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{1}{Sr}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Et si on utilise ensuite l'approximation de champ faible, c'est seulement pour identifier K et S en se mettant loin de la source.

Il n'est pas aisé de se représenter un espace-temps, mais on peut au moins tenter de visualiser une coupe 2D en prenant $t=0$ et $\theta=\pi/2$ (plan équatorial). En opérant un plongement de la métrique obtenue en une surface de révolution dans un espace 3D, on obtient la figure ci-dessous, appelée paraboloides de Flamm :



Attention, s'il s'agit bien d'une représentation fidèle (isométrique) de la symétrie spatiale de Schwarzschild, elle n'est que spatiale ! Donc pas de physique là-dedans, pas de

causalité, pas de trajectoire. Cette figure nous permet seulement d'appréhender la courbure spatiale due à la masse.

C'est plutôt sympa de savoir gérer les distributions sphériques de charge puisque la Terre n'est plus plate depuis bien longtemps, tout comme la plupart des astres qui nous entourent d'ailleurs.

La métrique de Schwarzschild sert donc de base à l'étude de la plupart des effets de la relativité générale sur notre environnement et nous l'utiliserons abondamment dans le chapitre consacré aux tests de la relativité générale.

Horizon du trou noir

Regardons maintenant les nouveautés qu'apporte la métrique de Schwarzschild par rapport à la physique newtonienne. La plus flagrante, c'est que $R = 0$ ne semble plus la seule valeur aboutissant à une singularité ! Une certaine valeur de R semble aboutir à une divergence :

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

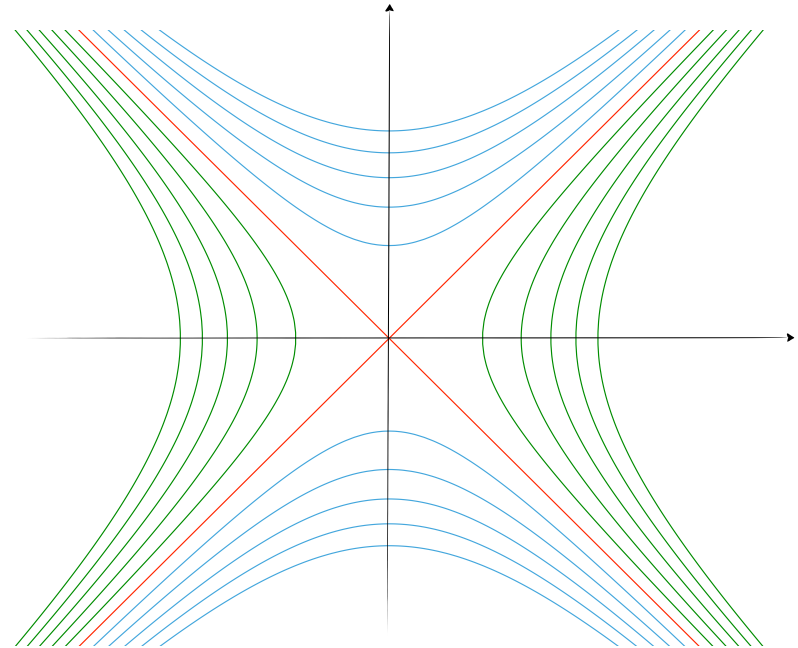
c'est le **rayon de Schwarzschild** ou **horizon des évènements** d'un trou noir

Beaucoup de choses sont inquiétantes avec ce rayon et on va tâcher de se rassurer...

Première (petite) inquiétude : comment se fait-il que, passé ce rayon, les signes des termes devant dt^2 et dr^2 s'échangent comme si le temps devenait de l'espace ?

Ce n'est qu'un problème de coordonnées et pour s'en convaincre, vérifions qu'on est déjà tombé sur une bizarrerie

du genre sans trop s'en effrayer. En effet, si on reprend la métrique de l'espace de Rindler et qu'on effectue le changement de variable $\rho^2 \rightarrow 2\zeta$, on tombe sur une métrique avec un même terme au numérateur de dt^2 et au dénominateur de dr^2 et pouvant changer de signe !



On a bien :

$$2d\zeta = d(\rho^2) = 2\rho d\rho$$

$$\Rightarrow d\rho = \frac{d\zeta}{\rho}$$

$$\Rightarrow d\rho^2 = \frac{2d\zeta^2}{\zeta}$$

Et la métrique devient :

$$d\tau^2 = 2\left(\frac{d\zeta^2}{\zeta} - \zeta d\omega^2\right)$$

On retrouve donc quelque chose de ressemblant à la métrique de Schwarzschild, et le passage d'un ζ positif à un ζ négatif revient à changer les signes devant ρ^2 dans la métrique

initiale, ce qui modifie la position des hyperboles par rapport au cône de lumière. Un temps propre constant correspond à une hyperbole $x^2-t^2 = \text{constante}$, hyperbole tangente au cône de lumière, à l'extérieur de celui-ci pour des ζ positifs ou à l'intérieur dans le cas contraire.

Le passage d'une valeur positive à négative de ζ correspond donc à une traversée du cône de lumière vers un nouveau jeu d'hyperboles (le cône servant de frontière).

Au niveau pavage de l'espace par un jeu de coordonnées, il n'y a rien de choquant (il n'y a pas échange entre temps et espace). Mais par contre, les nouvelles hyperboles ne peuvent être suivies physiquement par un mobile (il irait plus vite que c). Il y a eu passage pour l'observateur immobile d'évènements de type temps à des évènements de type espace ; les hyperboles bleues correspondent à des évènements non causaux.

Rq : Cette similitude entre métrique de Rindler et métrique de Schwarzschild n'est pas un hasard...

Rassurons-nous maintenant sur le côté non divergent du rayon de Schwarzschild, car non, il n'y a pas divergence. Heureusement d'ailleurs, car on ne s'attend pas à une explosion dans un espace vide ! Une divergence de la métrique signifierait une courbure infinie. Et pourquoi la courbure deviendrait infinie sur une sphère imaginaire entourant une masse circonscrite ?

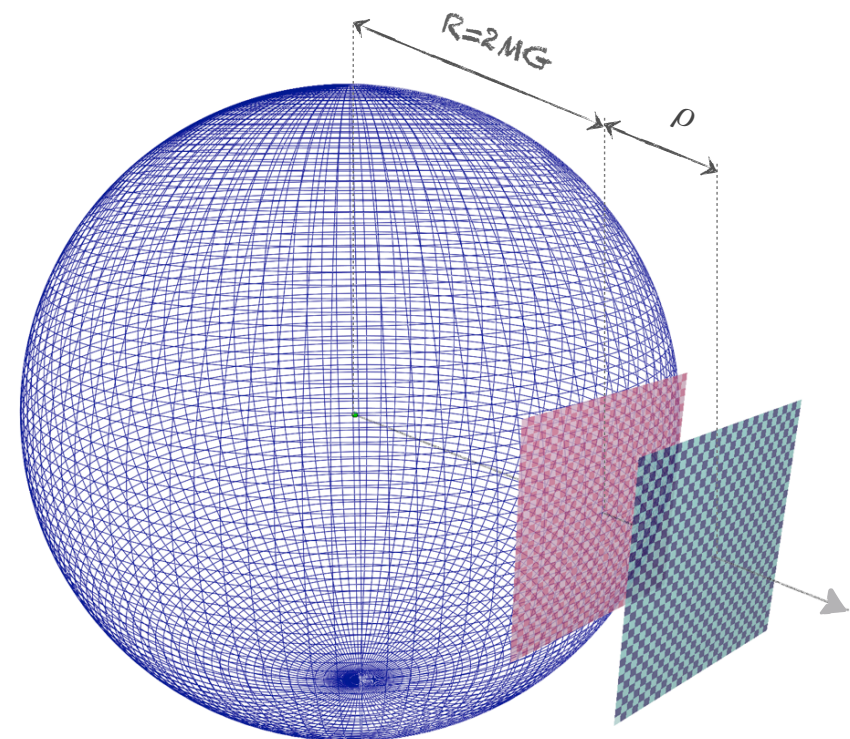
Nous allons voir que cette apparente divergence n'est, encore une fois, que le fruit de notre choix de coordonnées

(correspondant à un observateur immobile ou, ce qui revient au même, très loin de la masse) mais nous verrons aussi que quelque chose d'important se joue bien, malgré tout, à cet endroit-là.

Pour comprendre, on va se placer dans l'environnement immédiat d'un point sur la sphère de rayon $R=2GM$ (on oublie un temps le c) et on opère un petit changement de coordonnées.

La sphère épouse localement son plan tangent, d'où :

$$R^2 d\Omega^2 \approx dy^2 + dz^2$$



En regardant un point éloigné d'un poulème de la sphère sur l'axe radial, à la distance r , on a au premier ordre $r=2MG$ et donc :

$$1 - \frac{2MG}{r} \approx \frac{r-2MG}{2MG}$$

Par conséquent, si on réécrit la métrique de Schwarzschild près de l'horizon, on obtient :

$$d\tau^2 = \frac{r-2GM}{2GM} dt^2 - \frac{2GM}{r-2GM} dr^2 - dy^2 - dz^2$$

Et on obtient pour la petite distance propre ds sur l'axe radial ($dt = 0$) :

$$ds = \frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{r-2GM}} dr$$

Si nous voulons maintenant une distance radiale quelconque à l'horizon (appelons-la ρ), il nous faut intégrer ds :

$$\rho = \int_{r'=2MG}^{r'=r} ds$$

soit :

$$\rho = \int_{r'=2MG}^{r'=r} \frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{r'-2GM}} dr'$$

d'où :

$$\rho = 2\sqrt{2GM}\sqrt{r-2GM} = \sqrt{8GM}\sqrt{r-2GM}$$

Remplaçons r par ρ dans la métrique :

$$d\tau^2 = \frac{\rho^2}{16G^2M^2} dt^2 - d\rho^2 - dy^2 - dz^2$$

Et en posant $\omega=t/4MG$, on a finalement :

$$d\tau^2 = \rho^2 d\omega^2 - d\rho^2 - dy^2 - dz^2$$

La métrique de Rindler !

Conclusion :

La géométrie près de l'horizon est la géométrie d'un système de coordonnées uniformément accélérées.

Donc l'espace y est approximativement plat et la variable distance propre à l'horizon devient la coordonnée de l'espace de Rindler servant à distinguer un observateur immobile d'un autre. Plus on est près de la surface, plus l'observateur ressent une accélération violente vers l'extérieur (vers une augmentation de ρ).

Cela paraît logique, un observateur se tenant immobile par rapport à la masse centrale se trouve dans un espace courbé et il ressent bien une courbure constante à l'endroit où il est posé. Et comme à une courbure correspond une accélération... L'horizon de l'espace de Rindler (le cône de lumière), $\rho=0$, correspond ici, par définition, à $R=2MG$, d'où le nom d'horizon des événements donné au rayon de Schwarzschild.

Les réflexions sur l'horizon de l'espace de Rindler sont transposables ici : en deçà de ce rayon, l'accélération

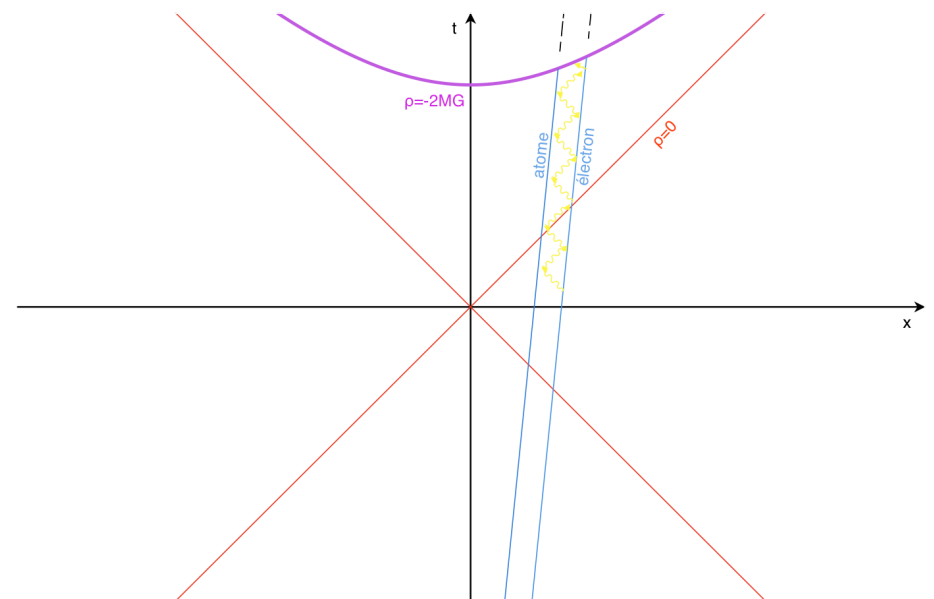
nécessaire pour rester immobile par rapport à la masse entraînerait une vitesse supérieure à c et n'est donc pas accessible. Ainsi, même la lumière ne peut retourner en arrière (vers les grands r) d'où le nom de trou noir donné à cette sphère de rayon égal au rayon de Schwarzschild ; rien n'en sort.



Tout observateur à l'extérieur de cette sphère ne peut être relié causalement à un événement à l'intérieur. Et s'il regarde un mobile en chute libre, il le voit se rapprocher infiniment

lentement de l'horizon jusqu'à s'y fondre en même temps que la lumière qu'il émet perd toute énergie.

Une nouvelle fois, c'est la courbure de l'espace-temps qui est ici responsable de l'accélération ressentie pour rester immobile (comme une voiture sur une pente de plus en plus grande). Plus on s'approche de la masse, plus la courbure augmente, et passé le rayon de Schwarzschild, la courbure devient trop forte pour que la lumière elle-même puisse la remonter.



Mais cette idée de pente est un peu trompeuse. La barrière que constitue l'horizon n'est pas que spatiale mais spatio-temporelle ! Plutôt qu'une pente, on peut alors se la représenter comme un courant nous entraînant vers la singularité, courant de plus en plus fort au fur et à mesure que l'on se rapproche. À l'horizon, la vitesse du courant dépasse c .



Notons qu'on ne ressent rien de bizarre à la traversée de cette frontière à l'image du nageur qui se laisse entraîner par le courant. Par contre, plus moyen de remonter le cours de la rivière.

Les observations de l'explorateur ne sont pas modifiées, qu'elles concernent des points à l'extérieur ou à l'intérieur du trou noir... C'est en ça que le rayon de Schwarzschild n'est pas une singularité : rien de physique dans l'espace ne s'y joue. Par contre, sa traversée vaut condamnation ! Car si franchir cette frontière semble sur le moment sans effet, elle nous envoie vers une mort certaine...

En effet, n'oublions pas qu'il reste une singularité bien réelle en $r=0$ (ou $\rho=-2MG$). Cette singularité correspond, dans l'espace de Rindler, à une hyperbole d'axe temporel et tout événement ayant passé l'horizon est relié temporellement à

cette hyperbole. La rejoindre n'est qu'une question de temps... C'est-à-dire que rien allant moins vite que la lumière (c'est-à-dire peu de choses) ne peut y échapper.

Et là, on ne parle plus du tout de traverser une frontière imaginaire. Au niveau de la singularité, les grandeurs physiques deviennent réellement infinies. Et à sa proximité, nos constituants n'ont même plus le temps de communiquer, on se désolidarise totalement ! Mais bon, il est très probable que les forces de marée nous aient déjà zigouillés depuis belle lurette.

Derrière l'horizon

Les coordonnées de Rindler nous ont permis d'en savoir plus sur l'horizon. Oui, il s'agit d'une frontière, mais du point de vue de l'espace-temps, rien de pathologique ne s'y passe. En chute libre, l'horizon est traversé comme si de rien n'était. Par contre, cette traversée nous déconnecte du reste du monde.

Mais les coordonnées de Rindler ne sont qu'une approximation près de l'horizon. Cela serait intellectuellement plus satisfaisant de trouver un jeu de coordonnées globales dans lequel la métrique de Schwarzschild se montre un peu plus responsable au niveau de l'horizon puisque rappelons-le, la divergence à l'horizon n'est qu'un problème de référentiel.

Inspectons d'abord la structure causale de l'espace décrit pour voir ce qui cloche. Il suffit de regarder la tronche des cônes de lumières $d\tau^2 = 0$ pour se faire une idée.

Sans s'encombrer du $d\Omega^2$ qui traduit l'isotropie de notre symétrie, on a alors :

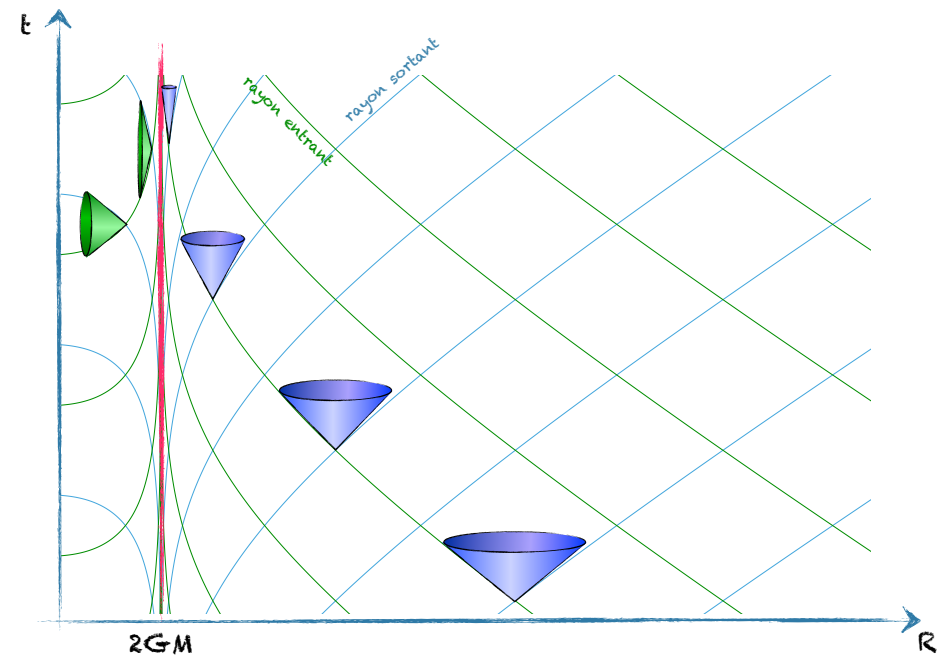
$$d\tau^2 = 0 = \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{R}} dR^2$$

d'où

$$\frac{dt}{dR} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2GM}{R}}$$

La pente des cônes de lumière vaut donc, comme il se doit, ± 1 quand R est grand (on a zappé le c pour ne pas s'embêter) ; loin, tout va bien, on retrouve un espace plat.

Par contre, plus on se rapproche de $2GM$ et plus le cône se referme. En deçà, dR ne peut plus être que négatif et on n'a plus de relation causale possible avec l'extérieur de l'horizon.



Dans ce système de coordonnées, le rayon lumineux ne peut

donc jamais atteindre l'horizon puisqu'il ne peut y avoir de relation causale. Cela pose problème, car si on a déjà commencé à comprendre que rien ne pouvait ressortir du trou noir, on peut bien y rentrer ! Or là, pas moyen.

Mais ces coordonnées sont adaptées à un observateur loin du trou noir et décrivent ce qu'il voit. À nous de trouver un jeu plus adapté à l'explorateur traversant l'horizon.

Son cône de lumière n'a aucune raison de se refermer sur l'horizon. On pourrait alors faire diverger le rayon, lui aussi, en $R=2MG$ et à un taux qui annule la divergence de t . Pour ce faire, il suffit d'imposer au nouveau rayon de garder les cônes de lumière constants :

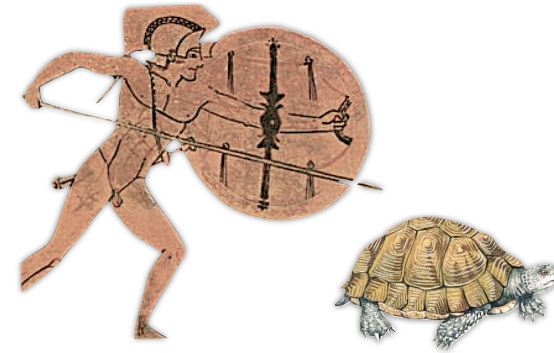
$$t = \pm R^* + cst$$

Cela donne :

$$\frac{dR^*}{dR} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2GM}{R}}$$

$$R^* = R + 2GM \ln \left| \frac{R}{2GM} - 1 \right|$$

R^* a pour nom **coordonnée tortue**. Ce n'est pas une blague, mais un hommage à un des paradoxes de Zénon d'Élée, Achille et la tortue. R^* , comme Achille, n'arrive pas à atteindre $2MG$. La coordonnée tortue nous permet de renvoyer l'horizon en $-\infty$.



On veut des coordonnées adaptées à un voyageur pour se débarrasser du problème d'horizon. Mais quel voyageur ? La lumière semble être le candidat le plus pratique, puisqu'il sert de limite. Prenons donc les frontières du cône de lumière comme coordonnées.

Elles sont données par :

$$t \pm R^* = cst$$

ce qui peut définir deux coordonnées :

$$u = t + R^*$$

$$v = t - R^*$$

$v = cst$ correspond à des rayons lumineux sortants.

$u = cst$ correspond à des rayons lumineux entrants.

On veut entrer, donc on va s'occuper de u .

Comme c'est le temps qui nous casse les pieds dans Schwarzschild, c'est lui qu'on remplace par u . Par contre, on reprend R et non R^* , sinon on ne verra jamais l'intérieur du trou noir. Cela donne :

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) du^2 - (dudR + dRdu) - R^2 d\Omega^2$$

C'est la métrique d'**Eddington-Finkelstein**. Elle est non diagonale et son terme g_{rr} est nul (ce qui correspond à un vecteur ∂_r de la base naturelle associée de type lumière).

Pour trouver la métrique, on peut écrire :

$$du = dt + dR + \frac{1}{\frac{R}{2GM} - 1} dR = dt + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{R}} dR$$

et

$$du^2 = dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^2} dR^2 + \frac{2}{1 - \frac{2GM}{R}} dt dR$$

donc

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) du^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{R}} dR^2 + 2 dt dR \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{R}} dR^2 + 2 \left(du - \frac{dR}{1 - \frac{2GM}{R}}\right) dR \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)} dR^2 + 2 du dR \end{aligned}$$

d'où

$$\left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{R}} dR^2 = \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) du^2 - 2 du dR$$

Bonne nouvelle, la métrique ne diverge plus en $2GM$! Le déterminant de la métrique vaut $-R^4 \sin^2 \theta$ et ça reste donc gentiment inversible tout du long.

Et les cônes de lumière ? Dans nos nouvelles coordonnées, leurs frontières (distance radiale de type lumière) sont données par :

$$\frac{du}{dR} = \begin{cases} 0 & \text{entrant} \\ \frac{2}{1 - \frac{2GM}{R}} & \text{sortant} \end{cases}$$

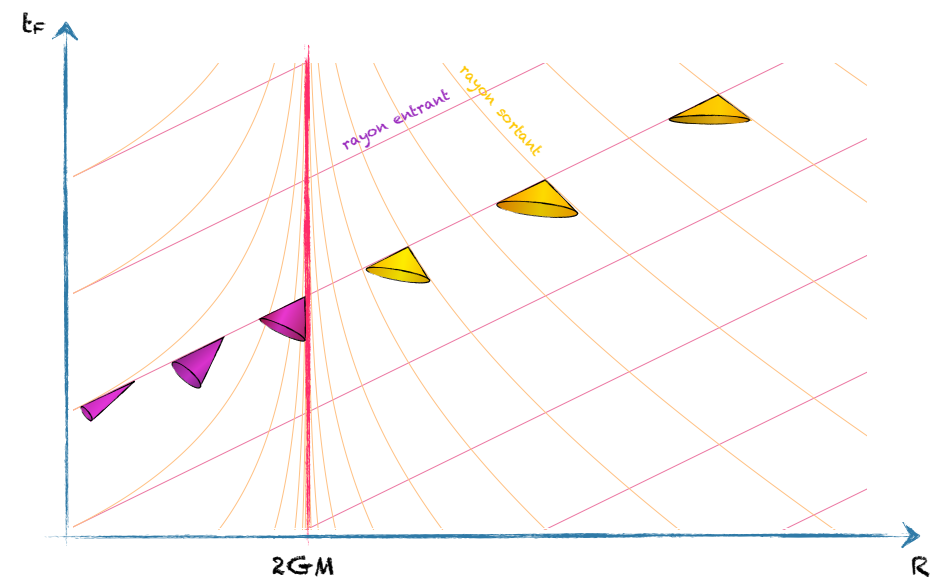
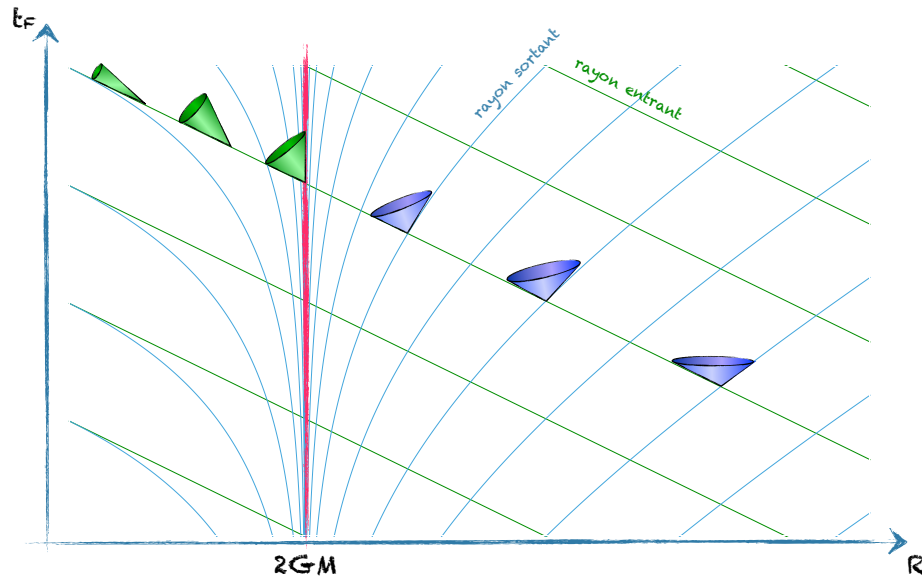
Loin du trou noir, les pentes du cône sont donc données par 0 et 2, ce qui correspond à une rotation de 45° des coordonnées de Schwarzschild.

Quand on s'approche du trou noir, les cônes se penchent et se ferment petit à petit. Mais preuve qu'on a bien travaillé, ils attendent maintenant sagement la singularité pour se fermer complètement et non plus l'horizon.

Par contre, il se passe bien quelque chose d'important à l'horizon : la pente des photons sortants devient verticale et par conséquent le futur tout entier est tourné vers la singularité comme on s'y attend !

On a ainsi découvert une extension vers le futur (au-delà de $+\infty$ de la métrique de Schwarzschild).

Rq : sur le diagramme, on a tourné les rayons lumineux entrants de 45° pour recoller Schwarzschild à l'infini.



Mais attendez, pourquoi n'a-t-on pas joué avec les coordonnées v ?

On aurait obtenu :

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dv^2 - (dv dR + dR dv) - R^2 d\Omega^2$$

Les cônes traversent à nouveau l'horizon, mais vers le passé !
 Comme si en $t = -\infty$ se trouvait l'opposé d'un trou noir, une source aux rayons lumineux, un **trou blanc**, qui ne peut pas être atteint par un chemin dirigé vers le futur.

On a ainsi une extension vers le passé de Schwarzschild.
 Mais cette solution ne semble pas physique, c'est plus sûrement un artefact né de l'idéalisation d'un trou noir éternel. La réalité de sa formation gomme cette solution étrange comme on le rediscutera plus loin.

Extension maximale

Bon, on avance ! On a maintenant deux extensions de Schwarzschild ; une vers le futur, l'autre vers le passé. Mais problème : elles sont déconnectées.

Si on réussit à combiner ces deux solutions, on aura ce qu'on appelle l'extension maximale de l'espace-temps de Schwarzschild.

L'idée est d'utiliser u et v simultanément. Cela donne comme métrique :

$$d\tau^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{R} \right) (du dv + dv du) - R^2 d\Omega^2$$

avec R implicitement défini par u et v :

$$\frac{1}{2}(u - v) = R + 2GM \ln \left(\frac{R}{2GM} - 1 \right)$$

Résultat : on a récupéré notre problème d'horizon rejeté à $\pm\infty$.

Une solution (qu'on validera par les simplifications qu'elle entraîne) pour ramener ces points ensemble, à distance finie, est d'utiliser des exponentielles :

$$U = e^{u/4GM} \text{ et } V = -e^{-v/4GM}$$

L'horizon est maintenant en $U = 0$ ou $V = 0$.

Pourquoi ce choix :

$$\frac{u - v}{4GM} = \frac{R}{2GM} + \ln \left| \frac{R}{2GM} - 1 \right|$$

On peut alors réécrire le préfacteur $(1 - 2GM/R)$

$$1 - \frac{2GM}{R} = \frac{2GM}{R} \left(\frac{R}{2GM} - 1 \right) = \frac{2GM}{R} e^{-R/2GM} e^{(u-v)/4GM}$$

Et la métrique devient :

$$d\tau^2 = \frac{2GM}{R} e^{-R/2GM} (e^{u/4GM} du)(e^{-v/4GM} dv) - R(u, v)^2 d\Omega^2$$

d'où le choix de U et V .

On obtient alors :

$$d\tau^2 = \frac{32(GM)^3}{R} e^{-R/2GM} dU dV - R(U, V)^2 d\Omega^2$$

C'est la métrique de **Kruskal-Szekeres**

$R = R(U, V)$ est donné implicitement par :

$$UV = -e^{(u-v)/4GM} = -e^{R*/2GM} = - \left(\frac{R}{2GM} - 1 \right) e^{R/2GM}$$

et $t = t(U, V)$ par :

$$U/V = -e^{(u+v)/4GM} = -e^{-t/2GM}$$

C'est le défaut de cette métrique de dépendre à la fois de la coordonnée radiale et du temps (celle de Schwarzschild ne dépend pas de t , et celle de Finkelstein ni de u ou de v) mais contrairement aux deux autres, elle couvre l'espace-temps dans son intégralité !

On va maintenant passer des coordonnées de type lumière (∂_U , ∂_V sont des vecteurs nuls) à des coordonnées plus traditionnelles de type temps et espace (T, X) définies par analogie avec $(u, v) = t \pm R^*$:

$$U = T - X, \quad V = T + X$$

Cela donne :

$$d\tau^2 = \frac{32(GM)^3}{R} e^{-R/2GM} (dT^2 - dX^2) - R(U, V)^2 d\Omega^2$$

Maintenant $R = R(T, X)$ est implicitement donné par :

$$X^2 - T^2 = \left(\frac{R}{2GM} - 1 \right) e^{R/2GM}$$

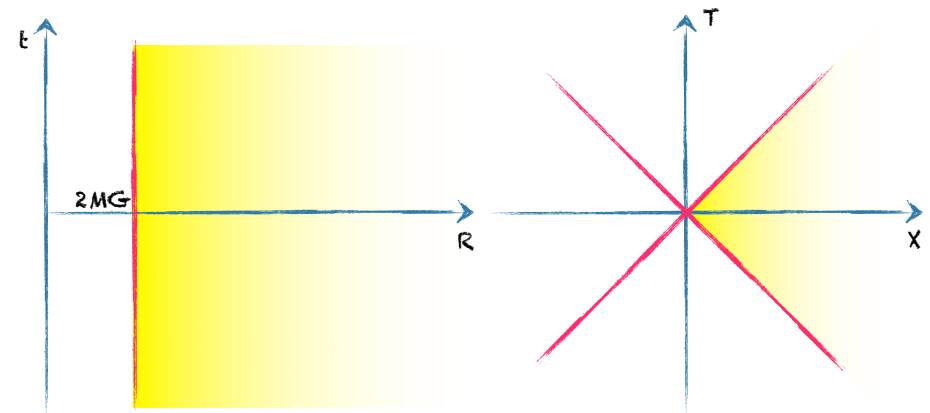
Résumons nos changements de coordonnées depuis Schwarzschild :

$$(t, R) \rightarrow (t, R^*) \rightarrow (u, v) \rightarrow (U, V) \rightarrow (T, X)$$

Comme dans Minkowski, les chemins de type lumière (lignes nulles) sont donnés par $X = \pm T + cst$.

Et les surfaces de rayon constant sont définies par les hyperboloïdes $X^2 - T^2 = cst$.

En particulier la partie d'espace-temps décrite par Schwarzschild ($R > 2MG$) est délimitée par $UV=0$ en Kruskal-Szekeres, union des deux lignes (surfaces nulles) $U=0$ et $V=0$, ce qui donne en (T, X) : $X = \pm T$.

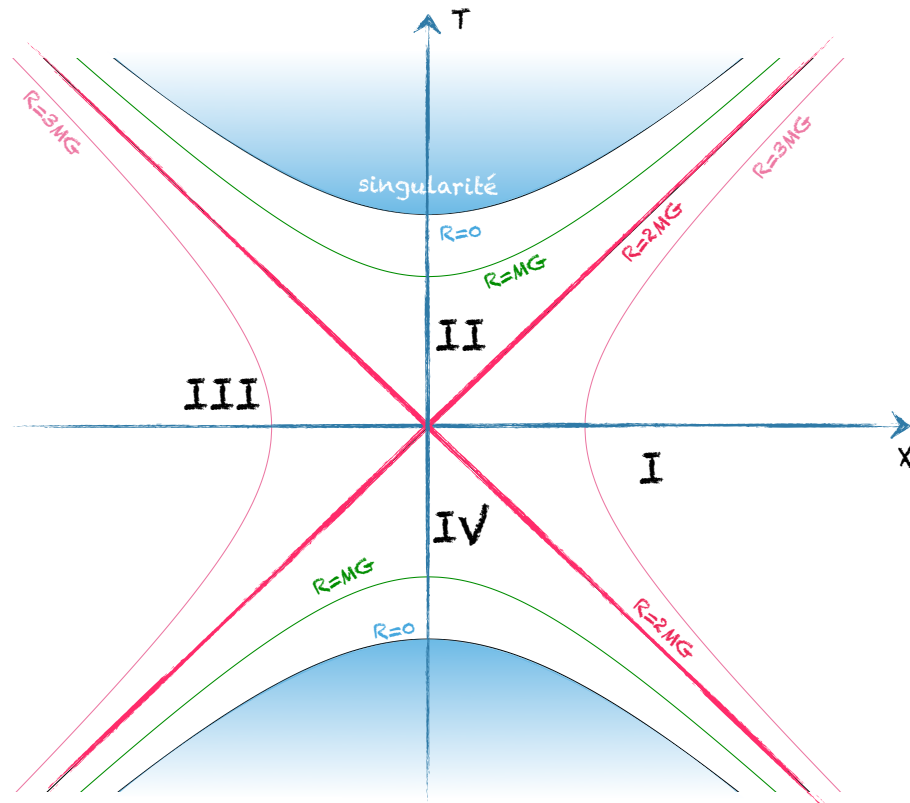


Dans ces coordonnées, la métrique est manifestement régulière partout (et pas seulement à l'horizon) sauf en $R=0$. La singularité correspond aux deux feuilles de l'hyperboloïde $R = 0 \Leftrightarrow T^2 - X^2 = 1$. Et on ne peut pas la retirer par un quelconque changement de coordonnées.

Il n'y a par contre aucune raison physique d'exclure le reste de l'espace décrit qui va être représenté dans un **diagramme** à cadran dit **de Kruskal**.

Le cadran de Schwarzschild mis à part (cadran I), il nous en reste III à découvrir !

Mais ça ne vous rappelle rien ? Mais si, ça ressemble drôlement à l'espace de Rindler !



Et c'est heureux d'ailleurs qu'il réapparaisse ici. La métrique de Kruskal-Szekeres est en effet la plus adaptée pour explorer la structure causale du trou noir (grâce aux cônes de lumière $X = \pm T$ équivalent à ceux de Minkowski). Or l'espace plat uniformément accéléré de Rindler nous avait déjà permis de nous familiariser avec la structure causale de ce filtre à un sens qu'est l'horizon. Et l'équivalence entre champ de gravitation et accélération nous avait permis de passer de

Schwarzschild à Rindler à proximité de l'horizon. Kruskal-Szekeres étend cette correspondance au-delà !

Donc les diagonales sont des lignes nulles (type lumière) et les lignes de R constants sont des hyperboles.

- La région I est la région familière de Schwarzschild, séparée par l'horizon des régions II and IV. Les coordonnées d'Eddington-Finkelstein (u, R) couvrent les régions I et II, (v, R) couvrent les régions I et IV. Un observateur dans la région I peut envoyer des signaux dans la région II et recevoir des signaux de la région IV.
- C'est aussi vrai pour un observateur de la région III déconnectée causalement. Les hyperboles constituant les cadrans I et III correspondent à des $R > 2GM$.
- Une fois qu'un observateur entre dans la région II, il ne peut plus s'en échapper et rejoindra inexorablement la terrible région $R=0$ en un temps propre fini. Pour ajouter à son malheur, le physicien sadique peut lui prédire que toute tentative d'échapper à son destin se soldera par une mort plus imminente encore ! En effet, comme la géodésique, donc la chute libre, maximise le temps propre ([voir ici](#)), toute ligne d'univers s'écartant de la géodésique rejoindra plus vite la singularité...
- En échange, une fois dans la région II, l'observateur aura pour la première fois la chance de recevoir des signaux ou

même rencontrer des cobayes provenant du monde miroir III.

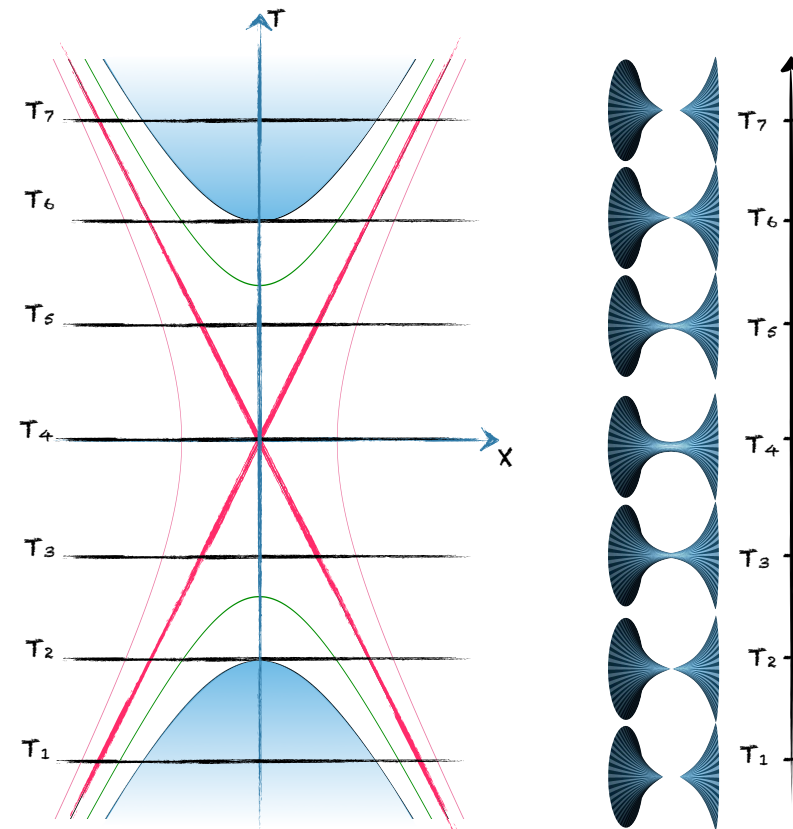
- Enfin, un observateur de la région IV doit avoir émergé de la singularité du passé à $R=0$ depuis un temps propre fini et peut envoyer des signaux et entrer dans les régions I ou III.

Une des surprises de ce diagramme se trouve dans la singularité en zone IV agissant comme l'inverse d'un trou noir, comme un miroir. On l'appelle **trou blanc** ou **fontaine blanche**. Tout ce qui peuple les autres zones provient de cette singularité, d'après le diagramme.

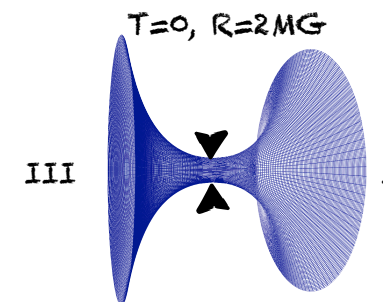
L'autre grande surprise de cette extension maximale de la métrique est la prévision mathématique, à l'intérieur de l'horizon, d'un pont entre deux univers, I et III, appelé pont de Rosen-Einstein ou trou de vers pour les poètes.

Mais ce pont n'aime pas les voyageurs. Il se referme aussi vite qu'il ne s'ouvre, ne laissant pas même à la lumière le temps de le traverser. Pour se représenter sa dynamique, on coupe l'espace-temps en tranche de T constant, on plonge ensuite le résultat dans un espace de révolution 3D et on anime le tout en fonction du temps (gardons à l'esprit que chaque cercle centré sur l'axe est en réalité une sphère).

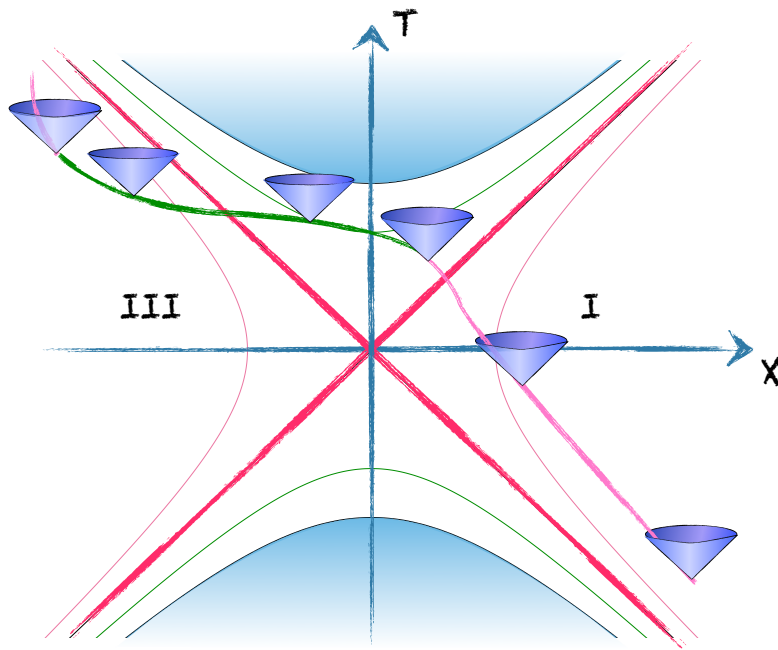
On voit ainsi un pont s'ouvrir et se refermer, connectant deux espaces asymptotiquement plats.



La largeur maximale du pont épouse l'horizon, ce qui peut s'avérer conséquent, mais quoique l'on fasse, tout chemin rejoignant I à III comporte des parties de type spatial, sortant du cône de lumière.



Il est donc impossible pour tout objet physique de traverser le pont.



Ce pont est créé par le trou blanc qui déplie l'espace-temps en deux espaces miroirs, type origami. Le trou noir s'évertue lui à refermer le pont en recollant les espaces séparés.

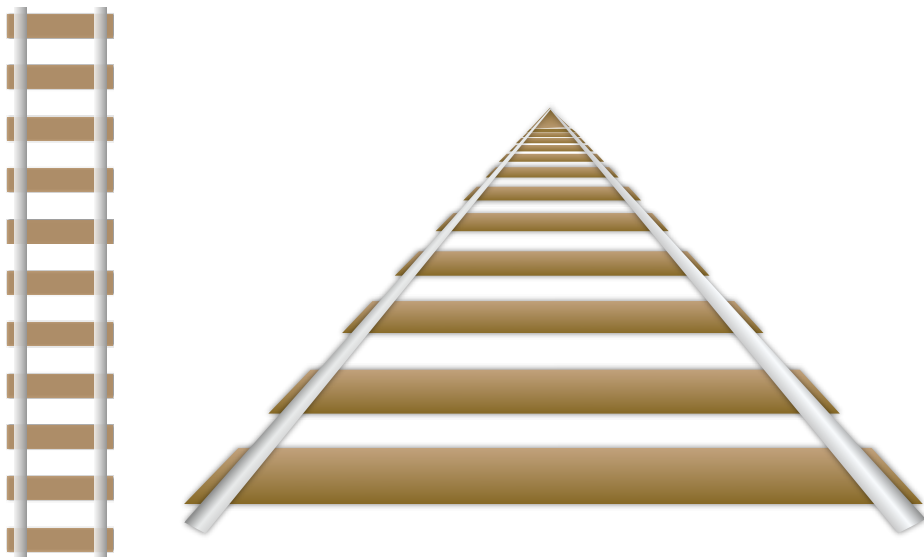
Mais ces bizarreries nées de la symétrie des équations sont balayées par l'histoire du trou noir. En effet, les univers qu'on étudie sont éternels et pour qu'un trou noir soit lié à un trou blanc, il doit être là depuis toujours, la singularité prenant place en $t=-\infty$ pour un observateur extérieur.

Or un trou noir se forme par effondrement gravitationnel d'une étoile, d'un amas, ou d'autre chose, brisant alors la symétrie du temps et avortant probablement par là même le

trou blanc. Et sans trou blanc, pas d'espace miroir déplié et pas de pont...

Diagrammes de Penrose

Les diagrammes de Penrose sont un moyen encore plus pratique, car compact, de représenter la structure causale de l'espace-temps, leur humble but étant de faire tenir les infinis sur une feuille de papier... Astuce que les peintres maîtrisent depuis bien longtemps : ne rendent-ils pas la perspective par des lignes de fuites convergeant en des points ?



Commençons avec un bête espace minkowskien.

On a 2 contraintes :

- on veut de la causalité facile à interpréter et pour cela, rien ne vaut des cônes de lumière à angle fixe (comme on sut les imposer chez Kruskal). Dans la métrique de Minkowski ($d\tau^2 = (dt-dr)(dt+dr) + r^2 d\Omega^2$), il faut préserver un angle de 90° entre les deux frontières $t \pm r = 0$.

En terme mathématique, cela impose une **transformation conforme**, c'est-à-dire conservant les angles. Aucun souci du moment qu'on garde la forme suivante pour la transformation :

$$U = F(t+r)$$

$$V = F(t-r)$$

- on veut aussi des infinis finis. Facile avec des arctangentes (\tan^{-1}) ou des tangentes hyperboliques. Pourtant peu avare en hyperbole, prenons pour F :

$$U = \tan^{-1}(t+r)$$

$$V = \tan^{-1}(t-r)$$

On peut récupérer ensuite des coordonnées de type temps et espace en prenant :

$$t' = U + V$$

$$R' = U - V$$

Avec $0 \leq R' \leq \pi$ et $|t'| + R' \leq \pi$

Et finalement, la transformation conforme envoie la métrique de Minkowski sur :

$$d\hat{\tau}^2 = \omega^2(t', R')d\tau^2 = (dt'^2 - dR'^2 - \sin^2 R' d\Omega^2)$$

$$\text{où } \omega(t', R') = 2 \cos U \cos V = \cos t' + \cos R'$$

On reconnaît en $d\hat{\tau}^2$ la métrique de l'univers statique d'Einstein, premier modèle cosmologique qui imaginait un univers fermé et immuable.

Comme R' joue le rôle d'un angle, la deuxième partie de la métrique décrit en effet une **hypersphère 3D** de rayon unité, S^3 . Et la géométrie finale, $\mathbb{R} \times S^3$, peut se projeter à 2D en **un cylindre d'axe temporel**.

Mais l'espace plat de Minkowski ne représente qu'une partie de cet univers puisque t' est borné :

l'espace-temps plat en son entier est envoyé sur le triangle fermé limité par 3 points :

$$i^+ (t' = \pi ; R' = 0)$$

$$i^- (t' = -\pi ; R' = 0)$$

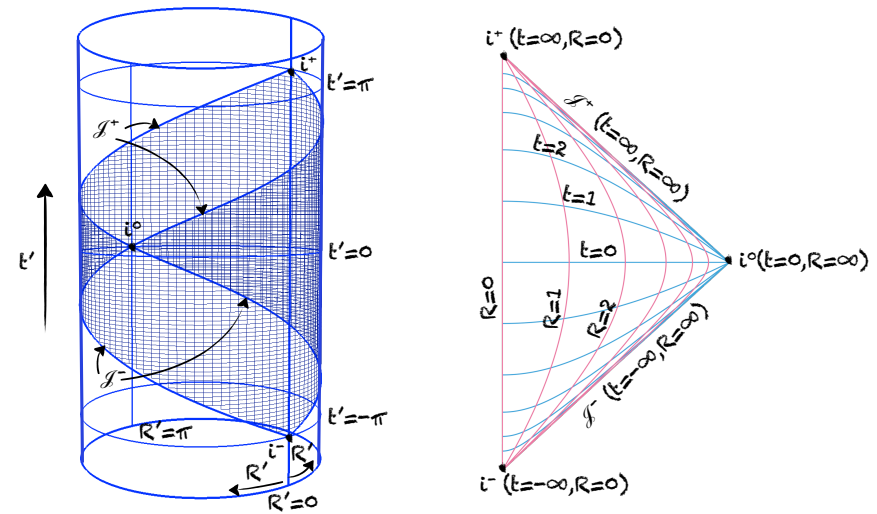
$$i^0 (t' = 0 ; R' = \pi)$$

Et si on récupère les coordonnées infinies t et R de la métrique initiale, ça nous donne :

$$i^+ (t = \infty ; R = 0)$$

$$i^- (t = -\infty ; R = 0)$$

$$i^0 (t = 0 ; R = \infty)$$



Il y a plusieurs infinis sur ce diagramme de Penrose :

- infinis de type temps futur et passé ($t = \pm\infty$) qui sont le début et la fin des trajectoires de type temps.
- infinis de type espace ($r = \infty$), là où toute surface de type espace se termine.
- auxquels s'ajoutent deux autres infinis appelés \mathcal{I}^\pm . Ce sont les infinis de type lumière passé et futur. Ils représentent l'origine des rayons lumineux entrants et la destination des rayons sortants.

Il faut garder à l'esprit que chaque point du diagramme est en réalité une sphère de rayon R .

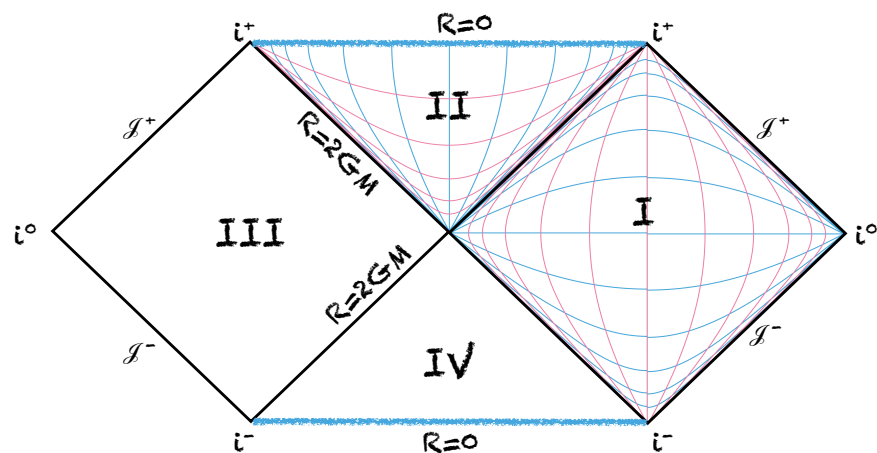
Un des intérêts des diagrammes de Penrose est que tout espace asymptotiquement plat à l'infini aura les mêmes

frontières, on dira qu'il a une infinité conforme identique à celle de l'espace de Minkowski.

On peut faire la même chose pour l'**extension maximale de Schwarzschild** en opérant une transformation conforme à partir des coordonnées de Kruskal. S'attendant à retrouver les mêmes frontières à l'infini, on colle donc des triangles les uns aux autres...

La région I est maintenant pourvue de deux nouvelles asymptotes temporelles : les horizons passé et futur du trou noir. La singularité $R = 0$ s'étend quant à elle horizontalement (temps et espace sont renversés à l'intérieur de l'horizon) d'une région asymptotique à l'autre.

Il faut aussi noter que i^+ est à distinguer de la singularité $R=0$ puisque les lignes de type temps ne sont pas forcées de l'atteindre (ouf) !



C'est plutôt sympa d'avoir un espace-temps tout entier compacté dans un petit diagramme, mais jusqu'ici, sans lui manquer de respect, il ne nous a pas appris grand-chose... Mais jusqu'ici seulement puisqu'il va nous permettre, dès le chapitre suivant, d'appréhender plus facilement la géométrie de la formation d'un trou noir.

Et les diagrammes de Penrose sont abondamment utilisés dans la description des trous noirs chargés ou en rotation qui exhibent des structures causales extrêmement complexes...

Formation des trous noirs

Les trous noirs éternels décrits par la géométrie statique de Schwarzschild sont évidemment une idéalisation. En réalité, les trous noirs se forment par effondrement de matière.

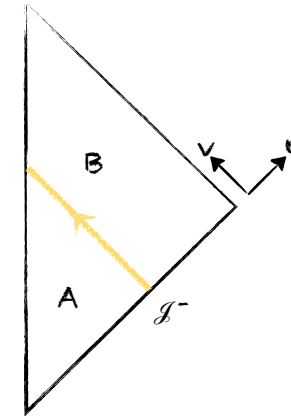
Décrire géométriquement cette formation va nous permettre de cerner un peu mieux le caractère global et non juste local de l'horizon.

Pour simplifier, on va modéliser l'effondrement gravitationnel par une fine pellicule sphérique constituée seulement d'énergie, pas de masse, se contractant radialement. Une sphère de photons par exemple, avec une extension radiale très faible, une coquille quoi, et une énergie totale M .

Pour construire la géométrie, on débute par le diagramme de Penrose d'un espace vide et on y représente la coquille

s'effondrant par une ligne de type-lumière de faible épaisseur, provenant de \mathcal{I}^- . Rappelons en effet que chaque point du diagramme représente une sphère.

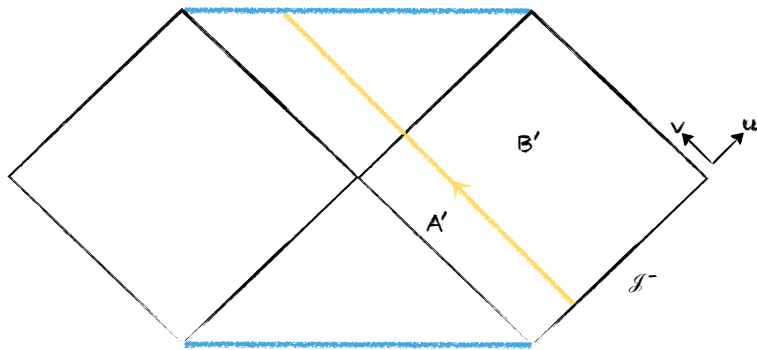
La valeur particulière de U choisie pour la trajectoire est arbitraire puisque deux U différents ne varient que par une translation temporelle.



La sphère sépare le diagramme de Penrose en deux régions : A et B. La région A, l'intérieur de la coquille, correspond à l'espace-temps plat initial, avant que la coquille ne passe. La région B, l'extérieur, subit par contre l'influence gravitationnelle de la coquille de masse M . Elle ne peut plus être représentée par une métrique de Minkowski !

Heureusement, le théorème de Birkhoff nous assure qu'une distribution sphérique bornée d'énergie est décrite à l'extérieur par la métrique de Schwarzschild. Il suffit donc de prendre le diagramme de Penrose de l'extension maximale et d'y représenter à nouveau la ligne lumière de la coquille (la

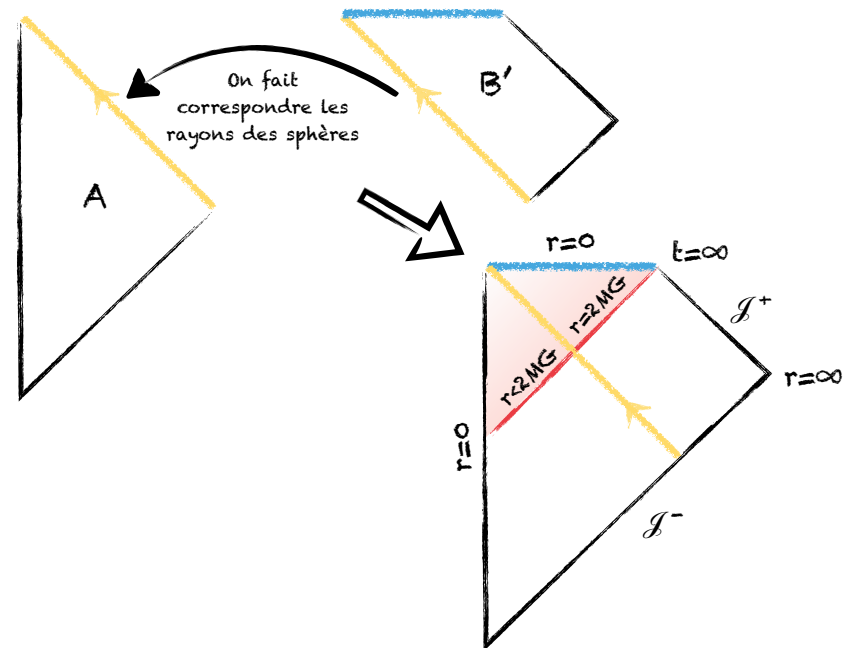
valeur particulière de U reste sans importance).
 Cette fois-ci, c'est la région intérieure, A' , qui est mal décrite !



Il reste maintenant à coller les deux parties ensemble...

Mais attention, on doit respecter la continuité du rayon R de la sphère de l'intérieur à l'extérieur. Est-ce possible ? Bien sûr, puisque dans les deux cas, R varie de façon monotone de $+\infty$ à 0 . On pourra donc toujours transformer l'un des deux diagrammes le long des V pour que l'identification se fasse continûment. Ça ne modifiera en rien la forme des cônes de lumière, tout va bien.

Le diagramme de Penrose résultant voit alors apparaître une surface de type lumière, tracée en rouge, plutôt intéressante. Tout rayon lumineux ayant son origine en haut à gauche de cette ligne finira nécessairement sur la singularité et ne pourra jamais atteindre \mathcal{I}^+ (ou $t=\infty$). Ça identifie cette surface rouge comme un horizon.



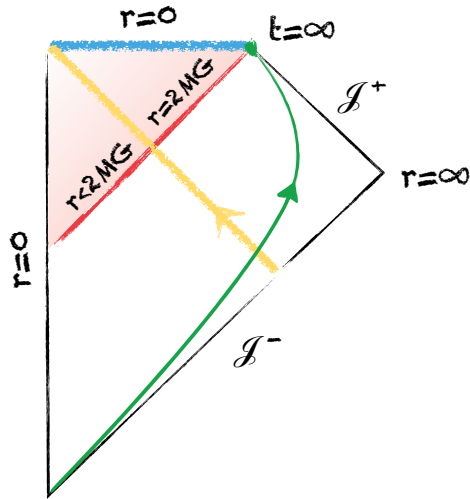
Dans la région B' , cette surface rouge coïncide avec le futur horizon du trou noir final et se trouve donc à $R=2MG$.

L'horizon s'étend aussi dans la région A où la métrique est encore celle d'un espace plat. Et dans cette région, la valeur de R sur l'horizon croît de 0 jusqu'à $2MG$ à la frontière avec la coquille lumineuse.

Il devient ainsi évident que l'horizon est un concept global. Dans la région A , aucune mesure locale ne peut déceler la présence d'un horizon dont l'apparition est entièrement due à l'effondrement futur de la coquille lumineuse.

Et tout observateur distant ($R \gg 2MG$) issu de $t=-\infty$, et aboutissant à $t=+\infty$, ne verra jamais aucun événement prenant

place sur cet horizon ou derrière lui. En ce sens, l'horizon peut être vu comme la fin des temps !



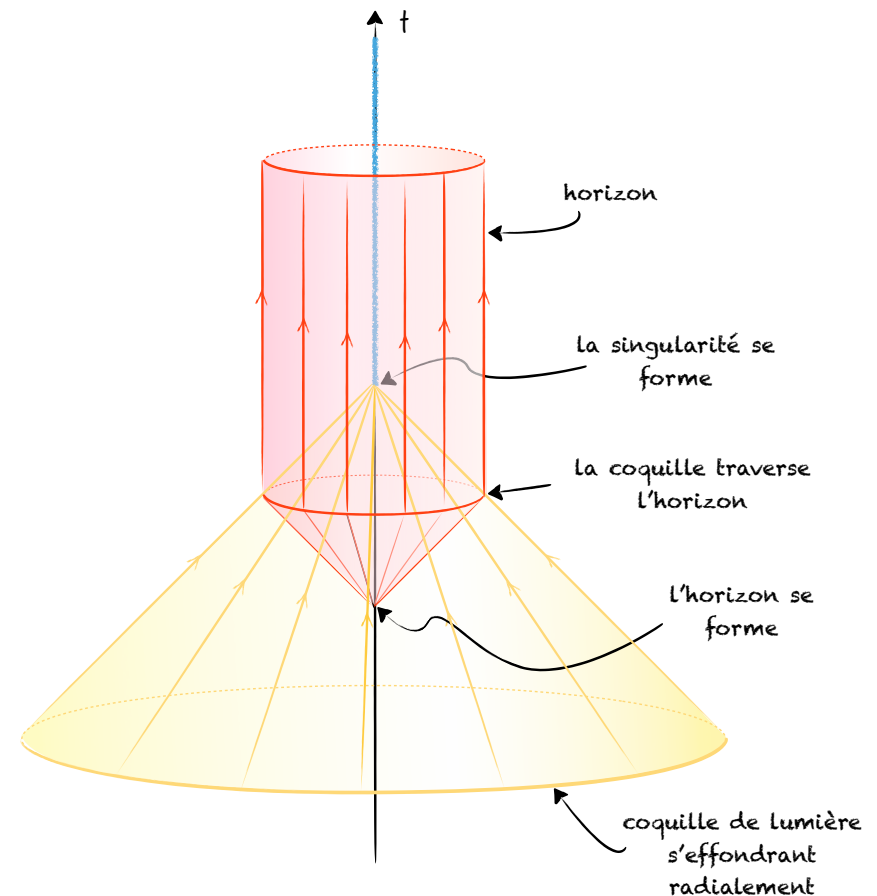
Toute particule ou onde franchissant l'horizon est vue par l'observateur distant comme s'en approchant asymptotiquement et se décalant infiniment vers le rouge.

Cette description basique de la formation d'un trou noir est en fait bien plus générale qu'il n'y paraît. Elle s'applique avec très peu de modifications à l'effondrement de tout type de distribution massique, même non sphérique.

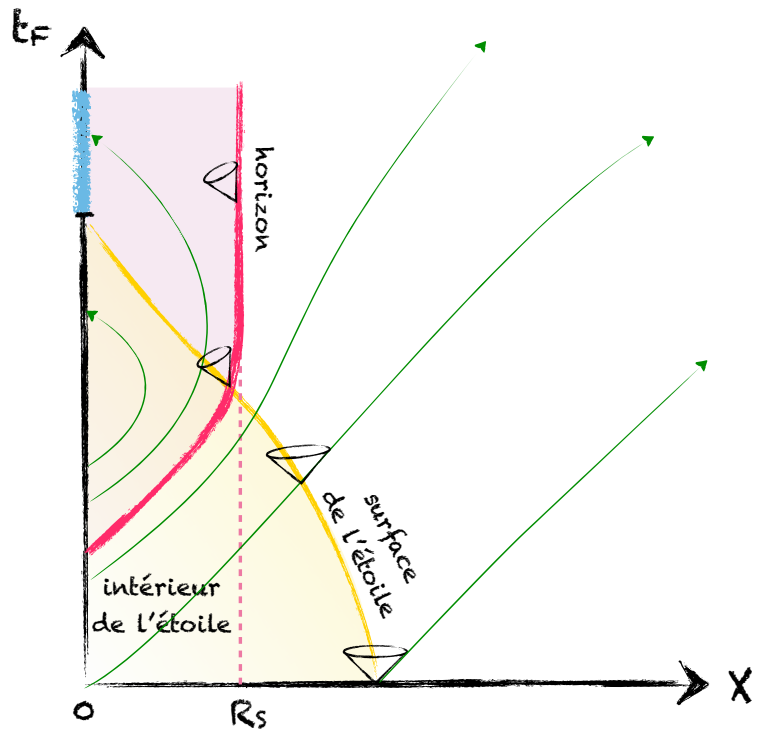
Dans tous les cas, l'horizon est une surface de type lumière qui sépare l'espace-temps en une région intérieure et une extérieure. Tout rayon lumineux émis depuis l'intérieur n'atteindra jamais l'asymptote future \mathcal{I}^+ et la matière ne peut en sortir. Dans la région extérieure, par contre, on peut tout à

fait envoyer des rayons sur \mathcal{I}^+ et les trajectoires de type temps peuvent atteindre $t=+\infty$.

La localisation de l'horizon dépend de tous les événements futurs. Il se compose d'une famille de rayons lumineux, ou géodésiques de type nulle. Ces géodésiques sont verticales une fois que la coquille lumineuse traverse l'horizon et essentiellement à 45° un peu avant cette traversée. Ces rayons lumineux sont appelés les **générateurs** de l'horizon.



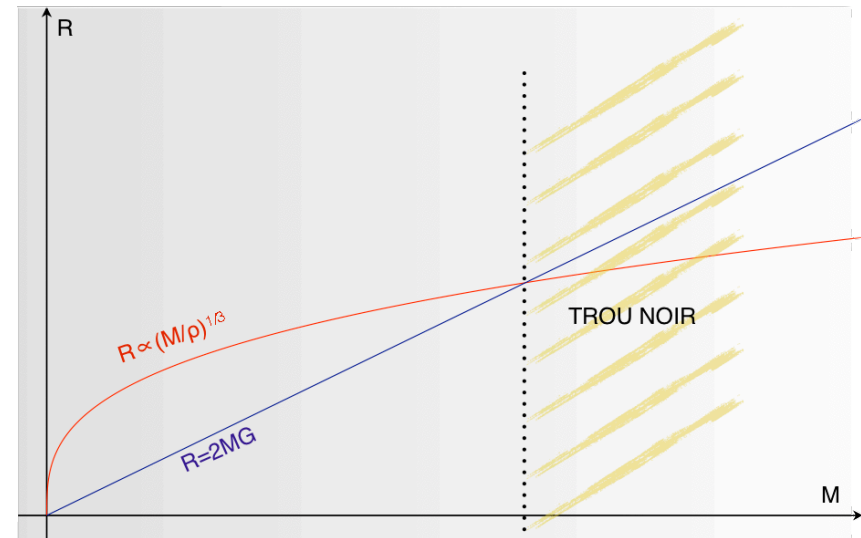
Et de façon un peu plus générale, l'effondrement d'une étoile (et au final de toute distribution de masse) peut se représenter ainsi en coordonnées de Finkelstein :



Zoologie

Attention, toute distribution de masse ne donne pas forcément un trou noir. Ça ne marche que si le rayon de Schwarzschild entoure effectivement le corps dont on étudie l'effet. Quand il se retrouve à *l'intérieur* de la distribution de masse et que l'extension de celle-ci n'évolue plus, il faut alors reprendre les équations ($T^{\mu\nu} \neq 0$) mais on ne découvre ce coup-ci plus aucune bizarrerie. Et à l'extérieur de la distribution, c'est immédiat, il n'y a plus rien de spécial : l'accélération ressentie par un observateur immobile augmente inversement à la distance au corps étudié, mais ne passe jamais de limite irrémédiable...

Mais les astrophysiciens sont aujourd'hui convaincus que de nombreux trous noirs peuplent l'univers, eu égard aux conditions somme toute assez légères que nécessite leur formation (et ce malgré le refus constant d'Einstein de croire en leur existence).



On peut d'abord se dire qu'il suffit d'une densité suffisamment grande pour concentrer assez de masse dans un petit rayon. Mais si de telles densités étaient inaccessibles ? En fait, quelle que soit la densité ρ fixée d'une distribution sphérique de masse, on peut faire un trou noir ! En effet, le rayon varie en racine cubique de la masse alors que le rayon de Schwarzschild varie proportionnellement à la masse. Il suffit donc d'augmenter suffisamment la masse (en agglomérant à la même densité) pour passer inexorablement sous la limite donnée par l'horizon de Schwarzschild.

On peut même faire un peu de zoologie : on trouve plusieurs types de trous noirs suivant l'ordre de grandeur des densités considérées.

- On a par exemple les **trous noirs supermassifs** au coeur des galaxies : la densité y est faible, mais le grand nombre d'étoiles présentes permet d'atteindre la masse limite (de 10^6 à 10^9 masses solaires pour ces densités).
- Les grands amas d'étoiles sont des bons candidats pour des **trous noirs intermédiaires** (entre 10^2 et 10^5 masses solaires).
- Les **trous noirs stellaires**, de faibles masses (quelques masses solaires), naissent des grandes densités apparaissant lors de l'effondrement gravitationnel d'étoiles géantes.
- On évoque même la possibilité de **micro trous noirs** lors d'immenses concentrations d'énergie qu'on trouverait dans les conditions de l'univers primordial ou même lors de collisions de particules (rayons cosmiques ou LHC).

La zoologie continue avec les trous noirs chargés, les trous noirs en rotation, etc. Ces derniers (trous noirs de Kerr) ont la particularité d'être entourés d'une «ergosphère» enveloppant l'horizon dans laquelle on peut venir puiser de l'énergie au détriment du moment cinétique du trou noir (c'est le processus de Penrose).

Aparté masse de Planck :

Quelle est la solution d'un problème de relativité générale avec une masse ponctuelle ? Un cône.

En effet, d'après les équations d'Einstein, on aurait un espace partout plat sauf en un point. Les seules valeurs non nulles du tenseur énergie-impulsion seraient localisées en ce point, tout comme la courbure. Et une courbure partout nulle sauf en un point définit, comme on l'a déjà vu, un cône.

Or ce cône peut être décrit par l'angle de déficit de son patron. Et cet angle est proportionnel à m puisque l'angle est proportionnel à la courbure et la courbure à la masse.

On voit ainsi que pour une masse assez grande, l'angle de déficit peut atteindre la valeur critique de 360° . L'espace disparaît alors en se refermant.

Cette masse critique a un nom : **la masse de Planck**. En USI, sa valeur est de $21,76 \mu\text{g}$, soit de l'ordre de la masse d'une puce... Mais une puce ponctuelle !

Remarque : si la distribution est un peu plus étendue, on a un cône à l'extérieur et un sommet arrondi à l'intérieur.