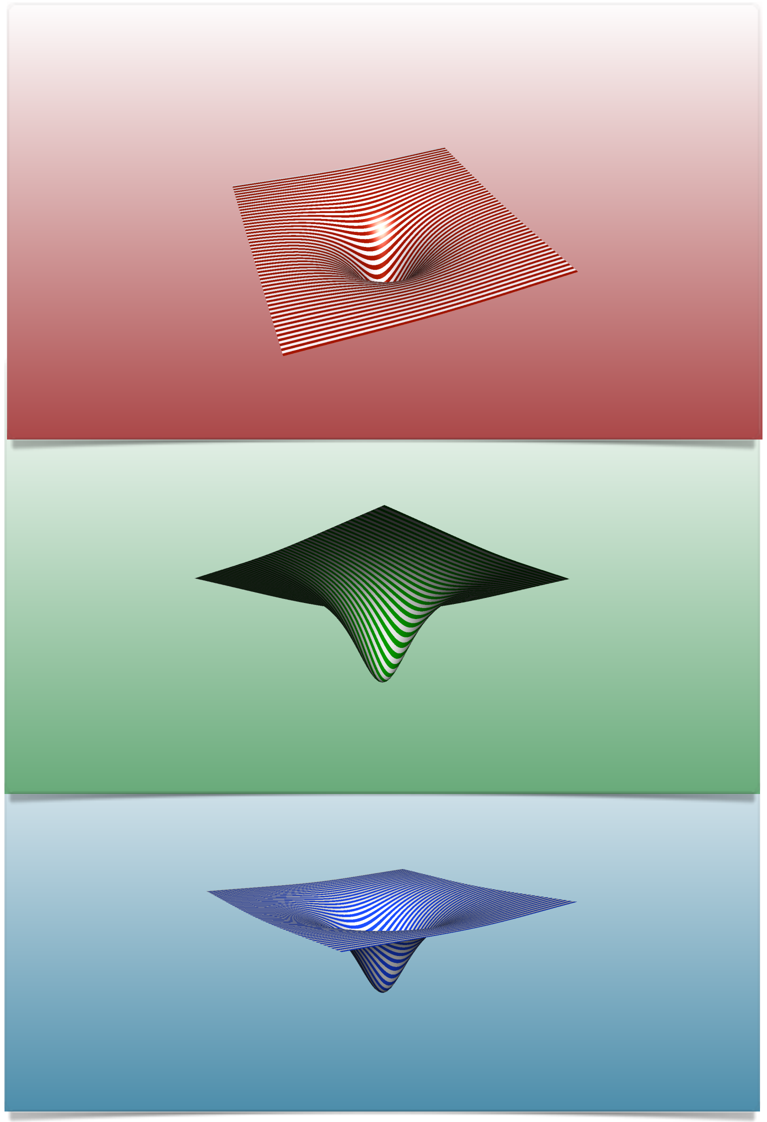
CHAPITRE 3

Equation d'Einstein

PLAN

La géométrie est la moitié de la relativité générale, l'autre moitié, c'est la matière. Le principe d'équivalence associe champ gravitationnel et courbure de l'espace. Penchons-nous maintenant sur la source de ce champ.



Impulsion, courant et loi de conservation

Comme on l'a vu dans la section espace-temps, le quadrivecteur position s'écrit dans une convention «temps» :

$$dx^\mu = \begin{pmatrix} dt \\ dx/c \\ dy/c \\ dz/c \end{pmatrix}$$

Si on veut définir une impulsion d'une particule de masse m qui soit tensorielle, on doit construire une vitesse invariante par changement de référentiel. Pour cela, on substitue le petit vecteur spatial dx^i par le petit **évènement** $c{\cdot}dx^\mu$ (on multiplie par c pour avoir une dimension d'espace) et dt devient $d\tau$, le temps propre (distance dans l'espace-temps).

«dt» regarde la durée entre les deux évènements dans le référentiel d'étude allant à la vitesse $v=dx^i/dt$ par rapport au référentiel propre dans lequel l'évènement est spatialement immobile, il est étiré par le déplacement (l'espace crée du temps par le mouvement). «$\boldsymbol{d\tau}$», **temps propre**, est le temps mesuré dans le référentiel propre, il est donc **indépendant d'un changement de référentiel** puisque le principe de relativité à l'ancienne (version Galilée) consiste justement à pouvoir confondre tout référentiel propre se déplaçant à vitesse v constante (référentiel d'inertie), donc le temps doit s'y écouler de la même façon, lui seul est physique.

Cela donne :

$$mv^i = m\frac{dx^i}{dt} \Rightarrow mV^\mu = mc\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Or,

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dr^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$$

On retrouve la vitesse v^i entre les deux référentiels.

Le temps propre s'exprime donc en fonction de la vitesse entre le référentiel propre et le référentiel d'étude.

D'où :

$$mV^\mu = mc\frac{dx^\mu}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Le 2ème terme montre ce que devient l'impulsion Newtonienne en relativité restreinte (elle prend maintenant en compte la limite indépassable qu'est la vitesse de la lumière vers laquelle on ne s'approche qu'asymptotiquement).

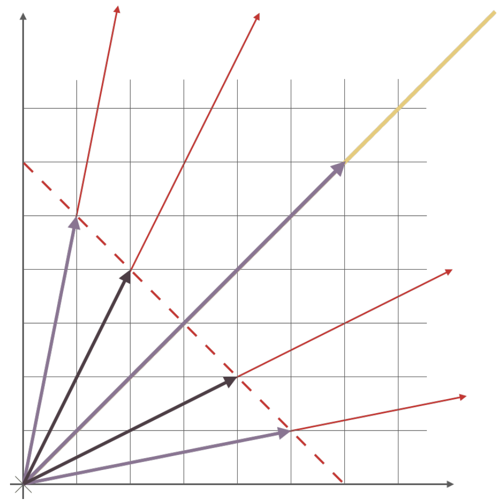
Le 1er terme est plus curieux et correspond à l'impulsion de la composante temporelle du quadrivecteur. En particulier, ce terme reste non nul même lorsque l'objet est au repos ! Un objet au repos aurait donc aussi une «impulsion»…

Mais c'est plus naturel qu'il n'y parait : même sans déplacement, le temps continue bien de s'écouler, et si on suppose que le temps est une dimension comme une autre, on doit bien associer une impulsion à ce transport de masse dans le temps de la même façon qu'on en associe une à un transport de masse dans l'espace…

Le **quadrivecteur impulsion** ressemble donc à :

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

Or la théorie de Maxwell de l'électromagnétisme nous apprend qu'un photon transporte avec lui une énergie E et une impulsion p de rapport constant et universel : $E/p = c$. Et comme cette particule fonce à la vitesse c, sa ligne d'univers est de type lumière, bissectant l'espace et le temps. Cela implique que pour tout observateur, les composantes spatiales et temporelles d'un quadrivecteur la décrivant sont de même amplitude. Étant donné que pour le photon, $p = E/c$, l'énergie divisée par la célérité de la lumière semble donc pouvoir être identifiée à la composante temporelle du quadrivecteur impulsion.



C'est donc ça : un transport de masse dans le temps, c'est de l'énergie ! Et de même que du temps se transforme en espace par le mouvement, de l'énergie se transforme en impulsion ! Or, si on y regarde de plus près, un transport de masse dans le temps, cela reste de la masse. Donc à une masse m correspond à tout moment une énergie de repos mc^2. **Masse et énergie sont une seule et même chose** si on considère que «c» n'est qu'un facteur numérique dépendant de la définition de nos unités de mesure !

Autre façon de voir que $p^0 = E/c$:

on a vu, dans une section précédente, comment s'écrivait l'action d'une particule libre en relativité restreinte :

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$$

$$\text{D'où } L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Et par définition :

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = m\frac{v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mV^i$$

D'où l'hamiltonien :

$$\begin{aligned} H &= p^i v_i - L \\ &= m\frac{v^i v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= cp^0 \end{aligned}$$

Or l'hamiltonien s'identifie à l'énergie de la particule. On en conclut que la composante temporelle du quadrivecteur impulsion n'est autre que l'énergie de la particule divisée par c : $p^0 = E/c$
et $P^\mu = (E/c, P^i)$

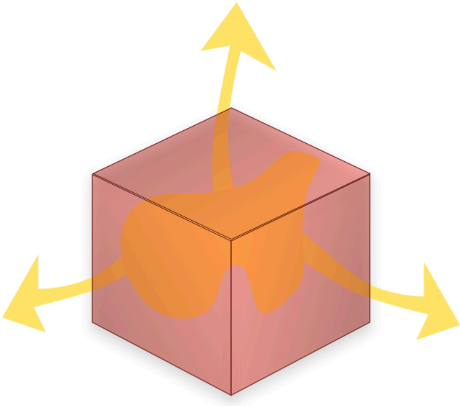
Prenons *c*=1 pour ne plus se soucier des conversions entre espace et temps.

Outre les couples temps-espace et énergie-impulsion qui échangent leurs rôles au gré des changements de référentiels, la densité ρ et le courant j d'une grandeur vont former un troisième couple.
Il suffit en effet de constater qu'ils ont même dimension (*c*=1 ⇒ temps = espace) : *grandeur / longueur*[3]

Un courant = une densité + un changement de référentiel.

En effet, le mouvement transformant du temps en espace et de l'espace en temps, densité et courant sont deux composantes de la même chose : un flux à travers une fenêtre (ou plutôt une hyperfenêtre), qu'elle soit une fenêtre espace×espace×espace ou espace×espace×temps.
Ensemble, ils forment un nouveau quadrivecteur : le courant à quatre dimensions $\boldsymbol{j^\mu}$. La densité devient la composante temporelle du quadrivecteur !

De la **conservation locale** d'une grandeur (charge, masse, etc.), on tire l'**équation de continuité** (tout ce qui disparaît d'un cube a du passer par les parois) :



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

qui se réécrit en utilisant notre tout nouveau, tout beau, quadrivecteur courant :

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

Tenseur énergie-impulsion

Comme on l'a vu, énergie et impulsion forment un autre quadrivecteur dont chacune des quatre composantes est conservée (impulsion = énergie + changement de référentiel).

Et une nouvelle fois, toute variation (que ce soit de l'énergie ou de l'impulsion) se fait de façon continue : tout ce qui est parti est passé à travers les murs. Donc il doit y avoir une notion de courant d'énergie (*ie* de densité puisque la densité n'est qu'un courant au repos), et d'impulsion.

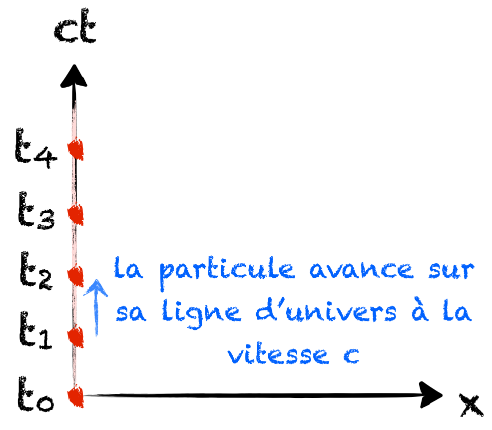
À partir de ce courant, on va pouvoir fabriquer un tenseur T de rang 2, où $T^{\mu\nu}$ est le flux de la μ composante de quadri-impulsion à travers une surface de x^ν constante.

Pour essayer de comprendre et construire ce tenseur, on va le considérer comme le flux d'impulsion d'un nuage de particules. L'impulsion de chaque particule vaut mV^μ. Et le flux de ces particules s'écrit nV^ν où n est le nombre de particules par unité de volume.

Le flux de l'impulsion est donc :
$mV^\mu \otimes nV^\nu = \rho V^\mu V^\nu$
où ρ est la masse volumique.

T^{01}, par exemple, est le flux de la quatrième composante, l'énergie, dans la direction 1, donc à travers une fenêtre x^1=cste. Une composante non nulle correspondrait à un déplacement du nuage suivant les x (en cartésien).

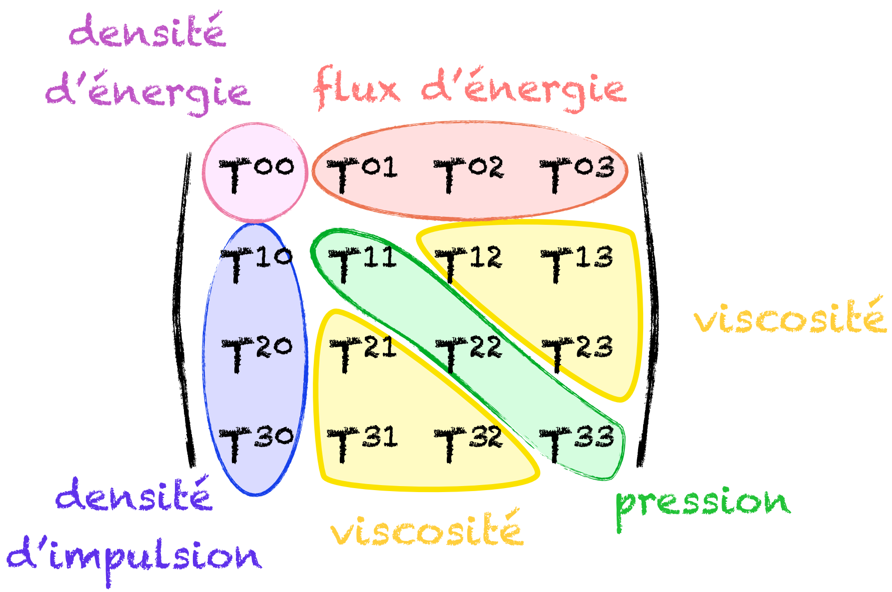
Autant un flux à travers une surface spatiale se représente bien, autant une surface temporelle peut laisser perplexe... Mais rappelons-nous que l'équivalence entre temps et espace fait passer le temps pour une dimension d'espace comme les autres (moyennant un facteur de conversion c). Une particule au repos se déplace à la vitesse de la lumière dans la direction temporelle, voilà tout ce que ça dit !



En effet, après rétablissement d'une dimension d'espace au quadrivecteur x^μ, (ct,x^i), on vérifie bien :

$dx^0/d\tau = dx^0/dt$, on est au repos
$= c\,dt/dt$
$= c$

Même chose pour la composante x de l'impulsion : elle aussi a une densité et un flux dans les 3 directions. On obtient T^{10}, T^{11}, T^{12} et T^{13}.
Le premier indice nous dit de qui on parle (E, p_x, p_y, p_z) et le deuxième donne la direction du flux (t, x, y ou z en cartésien). Dans la direction 0 (temps), on a la densité de l'impulsion. Un flux d'impulsion x selon l'axe y non nul (terme non diagonal) s'explique bien avec un flux oblique de particules : on a alors une composante x de l'impulsion qui est transportée d'un y à un autre.



Par analogie avec le tenseur des contraintes des milieux continus, on peut reconnaître des pressions dans les termes T^{ii} et une viscosité de cisaillement, dans les termes T^{ij}, $i \neq j$.

L'objet entier est un tenseur (ce qui n'est pas forcément évident), c'est le **tenseur énergie impulsion $T^{\mu\nu}$**.

Écrivons maintenant les **équations de continuité** pour ce tenseur. On en a une pour chaque ligne et en écriture compactée, cela donne :

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

(ν donne la direction)

Rq : techniquement, c'est la symétrie du tenseur qui nous assure de sa conservation.

C'est la **conservation locale de l'énergie** en relativité restreinte ! La relativité générale modifie quelque peu cette équation en transformant la dérivée partielle en dérivée covariante :

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

Cette modification n'est pas anodine comme on le verra un peu plus loin.

SECTION 3

De newton à la relativité générale

On a déjà un peu cerné la géométrie décrivant le champ de gravitation, et maintenant on a sa source : l'énergie. Le boulot d'Einstein a été d'allier tout ça en une équation. Cette équation lie géométrie et énergie-impulsion et doit être valable dans n'importe quel référentiel (on veut une équation tensorielle = faisant sens physiquement).

Sa démarche fut de partir des équations de Newton et de les généraliser à un espace-temps courbe. Suivons-le.

Parons-nous des oripeaux de la physique Newtonienne en ne nous occupant que de trucs évoluant lentement et dans un champ gravitationnel ni trop fort ni trop variable.

Exprimons plus clairement nos deux conditions :

- on est dans un référentiel où tout bouge lentement et tout varie lentement
  → $dx^0/d\tau = 1 + \varepsilon$ (petite correction)
  et $dx^i/d\tau=\varepsilon$ (quasi nulle).
- le champ gravitationnel est faible
  ⇒ $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu}$ (la correction à l'espace plat est petite) et varie peu $\partial g/\partial x = \varepsilon$.

Accélération le long d'une géodésique :

Les objets en chute libre se déplacent suivant une géodésique d'équation :

$$\frac{d^2y^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dy^\nu}{d\tau}\frac{dy^\rho}{d\tau} = 0$$

Avec la première approximation : $dy^\mu/d\tau \approx dy^0/dt \approx 1$
Et on a donc $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \rightarrow \Gamma^\mu{}_{00}$.
d^2y regarde le second ordre et ne peut donc pas être approximé. Par contre $d\tau^2 \approx dt^2$.

Finalement, si on regarde dans la direction x (y^1), on a :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma^x_{00} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\Gamma^x_{00}$$

Remarque :
- ce sont donc bien les Gammas qui jouent le rôle de potentiel gravitationnel. Ce sont eux l'obstruction qui empêche de se débarrasser des forces de marée !
- dans un espace-temps plat, cela se traduit par : un objet libre avance sans accélération !

Regardons $\Gamma^x{}_{oo}$ de plus près :

$$\Gamma^x_{00}(y) = \frac{1}{2}g^{xd}(y)(\frac{\partial g_{d0}}{\partial y^0} + \frac{\partial g_{d0}}{\partial y^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial y^d})$$

Comme $g \approx \eta$, les termes non diagonaux correspondent à des infiniment petits d'ordre 1, ainsi que les dérivées de g. Si on veut rester à l'ordre 1 en correction, on n'a pas le choix : d=x et $g^{xx} = \eta^{xx}$!

Cela donne :

$$\Gamma^x_{00}(y) = -\frac{1}{2}\eta^{xx}\frac{\partial g_{00}}{\partial x}$$

On a abandonné la dérivée temporelle des termes croisés car on aurait petite correction de petite correction...
On finit notre calcul en notant que η^{xx} = -1 et donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x}$$

Or Newton nous a appris que :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

où Φ est le potentiel gravitationnel.

En identifiant, on a :

$$g_{00}(x) = 2\phi(x) + c$$

On peut retrouver la même chose à partir du lagrangien d'un mobile :

Comme on l'a vu ici :

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{g_{mn}\frac{v^m v^n}{c^2} + g_{m0}\frac{v^m}{c} + g_{00}}$$

Si le mobile va doucement dans un espace s'écartant peu de l'espace plat, on a au premier ordre :

$$\begin{aligned} g_{mn}v^m v^n &\approx -v^2 \\ g_{m0}v^m &\approx 0 \\ g_{00} &\approx 1 + \delta g_{00} \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 + \delta g_{00} - \frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2(1 + \frac{1}{2}\delta g_{00} - \frac{v^2}{2c^2}) = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mc^2\delta g_{00}}{2}$$

Or le lagrangien Newtonien vaut :

$$\mathcal{L}_{Newton} = \frac{1}{2}mv^2 - m\phi$$

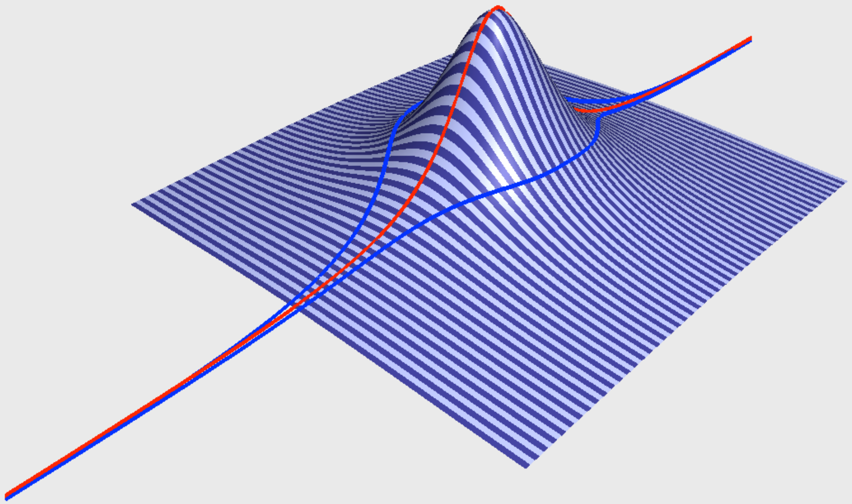
et

$$\delta g_{00} = g_{00} - 1$$

On retrouve bien :

$$g_{00}(x) = 2\phi(x) + c$$

Aparté sur les géodésiques :



Une géodésique ne correspond pas forcément au chemin minimisant la distance parcourue puisque leur définition ne porte que sur le transport parallèle du vecteur tangent. Exemple : le chemin rouge ci-contre est bien une géodésique puisque le vecteur tangent y reste toujours parallèle à lui-même. Mais cette géodésique est dynamiquement instable. Pour trouver et discuter la stabilité d'une géodésique sur une surface, il suffit de la penser comme un élastique tendu entre deux points.
Les géodésiques sont toutes les positions d'équilibre de l'élastique, qu'elles soient stables ou instables. L'élastique rouge aura vite fait de basculer sur une des deux positions bleues. De même un corps en chute libre sera éjecté de la trajectoire rose vers les trajectoires bleues.

Lien entre potentiel gravitationnel et masse :

Utilisons le théorème de Gauss liant divergence du champ de pesanteur et densité de masse :

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}\phi &= \overrightarrow{A(x)} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= -4\pi G\rho \\ \Rightarrow \nabla^2\phi &= 4\pi G\rho \\ &= 4\pi G T^{00} \end{aligned}$$

puisqu'en prenant c=1, la densité d'énergie se confond avec la densité de masse.

Φ est donc relié à un morceau de la métrique d'un côté et de l'autre à la source du champ gravitationnel : la masse ! Ça nous dit donc que **la métrique, elle-même, est contrôlée par les masses**.
Et au finish :

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi G T_{00}$$

Tensorialisation :

Problème :

Ce n'est pas une équation tensorielle (=valable dans tout référentiel) car on a fait des approximations (bouge lentement, etc.).
¿ Solution :

Y a-t-il une équation tensorielle qui tend vers notre résultat dans les mêmes approximations ?

Pour la partie droite, c'est facile. Le tenseur s'approximant en T_{oo} dans les conditions ci-dessus (en particulier, avec des variations temporelles négligeables) est bien sûr le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$.
On cherche donc une équation de la forme $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$
$G_{\mu\nu}$ est appelé tenseur d'Einstein et il doit contenir (pour marcher dans notre approximation) des dérivées secondes de la métrique et n'avoir que deux indices. On se dit rapidement que $R_{\mu\nu}$ pourrait marcher...

Einstein a donc essayé $\kappa R_{\mu\nu}$ et a ensuite testé la conservation de la charge (équation de continuité) : $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$.

Cette conservation devrait impliquer celle du tenseur de Ricci. Or ce n'est pas le cas ! En faisant le calcul (il faut passer aux Gammas), on trouve :

$$\nabla_\nu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu R$$

Mais dépassons, si c'est possible, notre déception, la solution est toute proche...
Comme R est un scalaire, dérivée covariante et dérivée ordinaire sont égales.
De plus, les dérivées covariantes satisfont à la loi usuelle sur les dérivées de produit :
$\nabla(A\times B)=A\times\nabla B+\nabla A\times B$.

Enfin, on sait que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle. Donc on peut passer le ∇ devant et on obtient :

$$\nabla_\nu R^{\mu\nu} = \nabla_\nu(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)$$

d'où

$$\nabla_\nu [R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R] = 0$$

Ça y est, on l'a notre équation tensorielle, valable quelque soit la forme de la métrique (il suffit que cela soit assez différentiable pour pouvoir opérer les dérivées) !

Résumons :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}$$

C'est l'**équation d'Einstein** et

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$$

est appelé **tenseur d'Einstein**

Remarques :

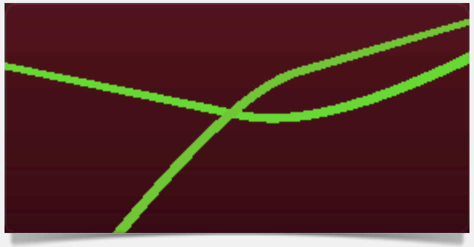
- L'équation impose à T d'être symétrique et c'est bien le cas (ouf !), par construction, du fait de l'invariance de Lorentz.
- Il n'y a pas encore d'explication simple de cette équation (tout du moins, Suskind ne connait personne en ayant une).

L'application de l'équation de continuité sur un tenseur $A^{\mu\nu}$ implique de transformer $A^{\mu\nu}$ en :

$\tilde{A}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} A$ où A est la trace du tenseur.

Pour un espace plat ($g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$), $\tilde{A}^{\mu}_{\mu} = -A^{\mu}_{\mu}$ d'où son petit nom anglais de «**trace reversed**».

Exemple d'implication :



La lumière courbe l'espace-temps. En effet, pas besoin de masse pour que le tenseur énergie-impulsion soit non nul. Deux lasers qui se croisent se dévient l'un l'autre puisqu'ils se déplacent sur les géodésiques d'un espace qu'ils contribuent à courber.
Mais l'effet est très faible et peut donc s'évaluer avec la formule de Newton arrangée en remplaçant les masses par E/c :

$$G\frac{E_1E_2}{r^2c^4} = 10^{-44}\frac{E_1E_2}{r^2} \text{ Newton}$$

Que peut-on dire **si le tenseur énergie-impulsion est nul** ?

$$T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0$$

ce qui donne, si on multiplie par $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R] = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R \Rightarrow R = 0$$

car

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}g^{\nu\mu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$$

Or si R=0, d'après

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0$$

on trouve :

$$R^{\mu\nu} = 0$$

Donc dans une région de l'espace-temps où le tenseur énergie-impulsion est nul, le tenseur de Ricci l'est aussi. En 2 et 3 dim, ça signifie que l'espace est plat. En 4D, non ! Si l'espace entier est dépourvu d'énergie, **ça ne veut pas dire que l'espace est plat** ! La nullité du tenseur de Ricci ne contient pas toute l'information géométrique dans un espace à plus de 3 dimensions. Et l'information manquante a physiquement la forme d'**ondes gravitationnelles**... Ce sont les «vacuum solutions» (qui n'existent qu'à plus de 3 dimensions). En effet, les fameuses ondes gravitationnelles se cachent dans les termes de cisaillement du tenseur de Riemann.

Attention : $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$=0 n'équivaut pas à $\partial_\mu T^{\mu\nu}$=0. La 2ème équation nous dit que toute variation locale dans une boite est passée par les parois. La 1ère contient un terme supplémentaire...

Conclusion : **l'énergie (T) n'est pas conservée en relativité générale** !! Tout ça à cause du champ qui contient lui aussi une énergie et un moment.

La situation diffère de l'électromagnétisme, car si les charges sont bien aussi sources du champ électrique, le champ électrique ne contient pas lui-même de charge ! Les ondes électromagnétiques ne contiennent pas de charge alors que les ondes gravitationnelles si. Le $T^{\mu\nu}$ n'est pas l'énergie-impulsion totale, car il ne comprend pas ce qui est porté par les perturbations de l'espace sous forme de vagues (*ie* par les gravitons). On aurait la même chose en électromagnétisme si les photons étaient chargés (dans ces cas, les protons et les électrons ne verraient pas leur charge conservée)... Un photon accéléré (un photon rebondissant sur un miroir par exemple) émettrait d'autres photons. C'est le cas pour le graviton ! C'est donc une source non linéaire (elle interagit).

Remarque : il y a deux méthodes pour démontrer l'équation $\nabla_\mu R^{\mu\nu}=1/2g^{\mu\nu}\partial_\mu R$:

- on développe les formules avec les symboles de Christoffel des deux côtés et on regarde si ça coïncide.
- plus physique et naturel : on utilise le principe variationnel. On formule sous forme d'action la relativité générale (plus exactement, il s'agit de l'action du champ de courbure de l'espace-temps appelée action de Einstein-Hilbert), puis on cherche la stationnarité de l'action sous variation de la métrique qui apparaît être la seule variable dynamique du champ. Or la variation de l'action par rapport à la métrique donne le tenseur d'Einstein...

Action d'Einstein-Hilbert :

Principale différence par rapport aux actions vues précédemment : on ne regarde pas l'action d'un mobile dont la dynamique pouvait être paramétrée par t mais l'action d'un champ de l'espace-temps lui-même. Les paramètres sont donc l'ensemble des coordonnées et le lagrangien a l'allure d'une densité :

$$S = \int \mathcal{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \int \mathcal{L} d\Omega$$

La densité lagrangienne doit être un scalaire tensoriel fonction de la dynamique de l'espace temps. Mais cela ne suffit pas...
En effet, l'action doit rester invariante par changement de système de coordonnées (puisque cela doit être le cas des équations qu'on en tire), donc :

$$S = S' \Leftrightarrow \int \mathcal{L} d\Omega = \int \mathcal{L}' d\Omega'$$

Or on sait par la théorie du changement de variables dans un calcul d'intégrales multiples que :

$$\int \mathcal{L} d\Omega = \int \mathcal{L} J d\Omega'$$

avec J, le Jacobien, définit comme :

$$J = \left| det(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}) \right|$$

Supposons que les termes non primés soient exprimés dans un repère de Minkowski (espace-temps plat) et que les primes correspondent à des coordonnées curvilignes quelconques :

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\eta_{\sigma\tau}$$

et en appelant g le déterminant de la métrique, ça donne :

$$g = [det(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu})]^2 \times (-1)$$

Ce qui montre que le déterminant de la métrique dans un espace-temps à quatre dimensions est toujours négatif.
En généralisant à des g et g' quelconques :

$$\frac{g'}{g} = [det(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu})]^2 = J^2$$

En remplaçant J dans l'intégrale, ça nous donne :

$$\int \mathcal{L} d\Omega = \int \mathcal{L} J d\Omega' = \int \mathcal{L}\frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}} d\Omega' = \int \mathcal{L}' d\Omega'$$

Et donc :

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g'}} = \alpha$$

Où α est donc un scalaire tensoriel (invariant lors d'un changement de coordonnées) et dépendant des variables dynamiques du champ. On a un candidat tout désigné : la courbure scalaire R !
Et finalement :

$$S = \int R\sqrt{-g}d\Omega$$

L'extrémisation de cette action par rapport à la métrique (notre variable dynamique) donne les équations d'Einstein.

Autre forme de l'équation d'Einstein :

Contractons l'équation d'Einstein en multipliant par $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R] = \kappa g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

On obtient :

$$-R = \kappa g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \kappa T^\mu_\mu = \kappa T$$

(de la même façon qu'on a appelé R le scalaire de courbure, on appelle T le scalaire énergie).

En remplaçant dans la 1ère équation, ça donne :

$$R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\kappa T = \kappa T^{\mu\nu}$$

donc :

$$R^{\mu\nu} = \kappa(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T)$$

2ème forme de l'équation d'Einstein

La partie droite ressemble au tenseur d'Einstein mais fabriqué à partir du tenseur énergie-impulsion à la place du tenseur de Ricci.

Rigidité de l'univers :

En rétablissant c dans les équations, on obtient :

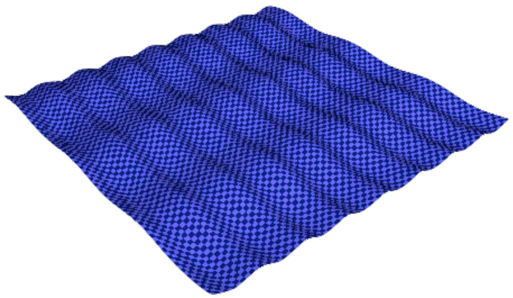
$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Le terme $8\pi G/c^4$ est extrêmement faible, de l'ordre de 10^{-43}, et témoigne de l'**immense rigidité de l'espace-temps** !
Il faut y aller vraiment très fort pour réussir à le courber un tant soit peu et voilà pourquoi l'approximation newtonienne n'a pour longtemps choqué personne.

SECTION 4

Ondes et relativité générale

Voyons comment la relativité générale modifie une onde se propageant sur un champ scalaire. Et pour cela, appliquons à nouveau la technique de «tensorialisation». C'est tellement amusant.



Soit un champ scalaire *Φ(x)* (*Φ* est tensoriel). En physique newtonienne, l'équation d'onde plane s'écrit :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}] = 0$$

ce qui peut se contracter en utilisant la métrique :

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$$

Après il faut essayer de voir si c'est tensoriel. *Φ* est un scalaire tensoriel (par hypothèse de départ). La dérivée d'un scalaire est bien un vecteur (=tensoriel) et le η peut se généraliser en g pour tenir compte de la courbure. Par contre, la dérivée ordinaire du vecteur n'est pas un vecteur, il faut donc remplacer par une dérivée covariante !
Petit problème, on ne sait dériver covariantement qu'un vecteur contravariant. Mais il suffit de passer la deuxième dérivée devant :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}) = 0$$

le terme supplémentaire en $\partial\eta$ en restreinte comme celui en ∇g en générale sont tous deux nuls...

L'équation devient donc :

$$\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}) = 0$$

Et pour être complètement «relativité générale», on peut remplacer la dérivée ordinaire restante par un ∇ puisque les deux dérivées se confondent sur un scalaire :

$$\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi) = 0$$

Soit en développant :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(g^{\mu\nu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}) + \Gamma^\gamma_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma} = 0$$

Voilà notre équation d'onde tensorielle ! Et on remarque qu'elle fait intervenir la gravitation (dans le Γ). Effet de cette interaction entre onde et gravitation : un lien entre espace et temps qui peut varier en fonction de la position.
Fini la linéarité et les conséquences sont spectaculaires par rapport à notre gentille onde linéaire : l'onde peut maintenant se courber, se plier (style vague), changer de fréquence, etc. Toute chose qui n'arriverait pas dans un espace vide !

Cette équation nous donne la condition pour qu'un système de coordonnées x^σ soit dit harmonique, donc pour qu'il conduise naturellement à des ondes puisqu'il obéira de fait à l'équation d'onde plane (d'Alembertienne) d'où on est parti :

En mettant g en facteur, cela donne :

$$[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\beta}) + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma}]g^{\alpha\beta} = 0$$

Or $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\beta} = \delta^\sigma_\beta$ et le premier terme est donc nul.

Il reste :

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 0$$

C'est la **condition harmonique** ou encore **jauge de Lorenz** par analogie avec l'électromagnétisme, une jauge étant une restriction sur l'espace des coordonnées s'appuyant sur une symétrie particulière. On l'appelle aussi jauge de de Donder et encore d'autres noms (on ne voulait froisser personne avec cette jauge).

On a vu comment la gravité affecte le champ de l'onde, mais demandons-nous maintenant comment lui-même l'affecte. Il porte une énergie et une impulsion et on va essayer de construire le tenseur associé pour avoir une équation complète.
Plaçons-nous d'abord dans un espace de Minkowski.

On veut un T fabriqué à partir de Φ. T est un tenseur et doit avoir deux indices. Que peut-on faire à Φ pour avoir des indices ? On dérive bien sûr.

On doit être guidé par quelque chose : l'énergie ne doit pas changer de signe quand Φ change de signe. Conséquence, les fonctions doivent être quadratiques en Φ (exactement comme pour l'énergie d'un oscillateur harmonique).
Pas de dérivées secondes donc. Ça nous laisse deux types de termes possibles :
$\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$, *et* $\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\Phi\partial^\sigma\Phi$

On multiplie par une constante c un des deux et on regarde si le T construit avec leur somme peut satisfaire l'équation de continuité pour un certain c. Si c'est le cas, on a un tenseur candidat !

$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + c\times\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\Phi\partial^\sigma\Phi$

Or :

$$\begin{aligned}\partial^\mu T_{\mu\nu} &= \partial^\mu(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) + \partial^\mu(c\cdot\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi)\\ &= (\partial^\mu\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi+\partial_\mu\phi(\partial^\mu\partial_\nu\phi)+c\cdot[(\partial_\nu\partial_\sigma\phi)\partial^\sigma\phi + \partial_\sigma\phi(\partial_\nu\partial^\sigma\phi)]\end{aligned}$$

En rouge, on reconnaît l'équation d'onde (=0) et tous les termes en bleu sont égaux. En prenant c = -1/2, on a donc :

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

On obtient ainsi notre tenseur et il est unique (la seule ambiguïté serait la multiplication globale par un scalaire, mais ce scalaire peut être absorbé dans la définition de Φ) :

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi)$$

L'équation de continuité nous impose à nouveau une forme «trace reversed» (cf. encadré du chapitre précédent) comme dans l'équation d'Einstein.

Regardons la densité d'énergie T_{oo} :

$$\begin{aligned}T_{00} &= \dot\phi^2 - \tfrac{1}{2}(\dot\phi^2 - \partial_x^2\phi - \partial_y^2\phi - \partial_z^2\phi)\\ &= \tfrac{1}{2}[\dot\phi^2 + \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi + \partial_z^2\phi]\end{aligned}$$

On reconnaît l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

On peut maintenant placer T dans l'équation d'Einstein. Il suffit de changer η en g (tous les autres termes sont déjà des tenseurs).
Et voilà comment la gravité répond à l'énergie et au moment d'un champ d'onde.

SECTION 5

Ondes gravitationnelles

La courbure de l'espace-temps modifie la propagation d'une onde, mais elle peut aussi elle-même en générer !

La relativité générale tient évidemment compte du déplacement à vitesse limitée de toute perturbation. Cette nécessité de causalité associée à la continuité de l'espace-temps élève celui-ci au rang de champ élastique. Ainsi, une modification de l'espace-temps à un instant et en un lieu donné doit pouvoir se propager de proche en proche d'où la prédiction d'Einstein de l'existence d'ondes gravitationnelles parcourant l'univers. Mais l'immense rigidité de «l'élastique» rend leur observation très difficile.

Une analogie entre ondes gravitationnelles et ondes électromagnétiques permet de cerner points communs et différences.

Pour simplifier les choses, on va se placer loin des sources de ces ondes. On a donc une distribution (de charges pour l'électromagnétisme, d'énergie pour la gravitation) éloignée de l'observateur. Et on veut que cette distribution varie.

➡ ***monopôles***

Dans les deux cas, pas moyen de faire disparaître et réapparaître tout ou partie de la distribution. En effet, **charge ou énergie se conservent**.

Traduction :
pas de monopôle électrique ni gravitationnel.
Conséquence :
pas d'onde scalaire (spin 0).

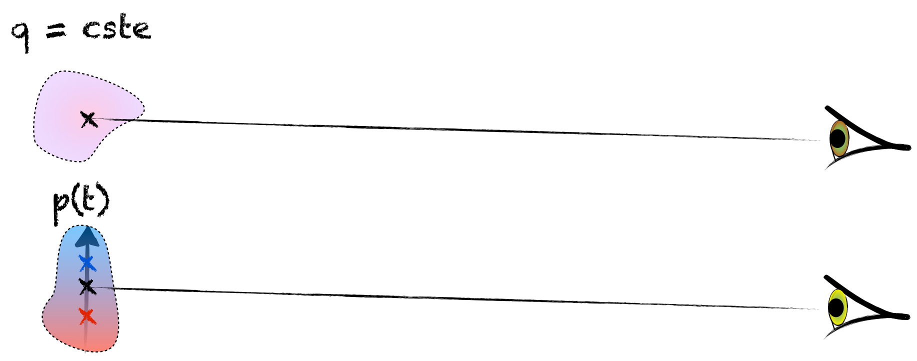
➡ ***dipôles***

Dans le cas gravitationnel, on ne peut pas non plus bouger le centre de masse ni faire tourner la distribution par **conservation du moment cinétique et angulaire**.
Traduction : **pas de dipôle gravitationnel**.
Conséquence : pas d'ondes gravitationnelles vectorielles.

Dans le cas électromagnétique, il en va autrement…
Bien qu'on ne puisse toujours pas bouger le barycentre des charges, l'existence de charges négatives permet de splitter la distribution. En effet, une charge négative se déplaçant vers le

haut pouvant être compensée par une charge positive se déplaçant vers le bas, on peut très bien séparer la distribution de charges en deux pôles.

Traduction :
les dipôles électromagnétiques peuvent générer des ondes.
Conséquence :
les ondes électromagnétiques sont vectorielles (spin 1).

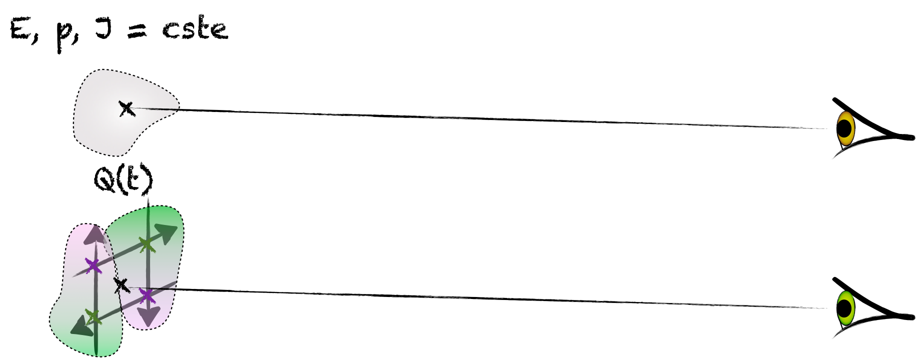


➡ ***quadrupôles***

On est toujours à la recherche de quelque chose qui pourrait varier dans la distribution de masses vue par l'observateur. On est maintenant amené à décomposer le mouvement dans deux directions et voir si ce mouvement permet de conserver tout ce qui doit l'être :
• rien ne doit apparaître ou disparaître (conservation scalaire)
• le centre de masse ne doit pas bouger (conservation vectorielle).

Pas de problème si les deux mouvements s'annulent deux à deux.

Traduction :
les quadrupôles de la distribution de masse peuvent générer des ondes gravitationnelles.
Conséquence :
les ondes gravitationnelles sont tensorielles de rang 2 (spin 2).



Regardons maintenant ce que cela implique sur l'onde produite. Et montrons d'abord que l'existence d'ondes gravitationnelles est implicite dans les équations d'Einstein.

Si on perturbe un peu un espace-temps plat, on a pour métrique (appelée métrique de champ faible) :
$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
avec $|\, h_{\mu\nu} \,| \ll 1$

$h_{\mu\nu}$ doit être symétrique. Ça nous laisse tout de même 10 éléments indéterminés...

On a dans ces cas-là besoin d'une jauge pour les fixer (on veut restreindre l'espace des coordonnées à l'aide d'une symétrie intéressante). Et ici, on aimerait que notre perturbation aboutisse à un d'Alembertien :

$$\square = \nabla_\mu \nabla^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Un truc se propageant quoi...

Il suffit de remonter d'un chapitre pour voir qu'une telle jauge existe, c'est la jauge de Lorenz (et 36 autres noms) :

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0$$

En remplaçant g par notre métrique presque plate, on obtient :

$\partial^\mu h^\sigma_\mu - \frac{1}{2}\partial^\sigma h = 0$, où h est la trace $h^\nu{}_\nu$

Encore une fois, le passage à la forme «trace reverse» (transformation du tenseur permettant d'automatiquement respecter l'équation de continuité) permet de simplifier l'écriture :

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h$$

La **jauge de Lorenz** s'écrit maintenant :

$$\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\lambda} = 0$$

L'équation d'Einstein devient, en champ faiblement perturbé et dans le vide (on injecte la métrique de champ faible dans $G_{\mu\nu}$, on applique la jauge et on prend $T_{\mu\nu} = 0$) :

$$\square \tilde{h}^{\mu\lambda} = 0$$

Conclusion : une faible perturbation du champ gravitationnel se propage comme une onde !

Remarques :

- on parle aussi de forme linéarisée des équations d'Einstein.
- on obtient la forme «plate» du d'Alembertien car notre espace de base est plat.

Dans un tel cas, on est amené à chercher des solutions sous forme de complexes oscillants (on prend la partie réelle à la fin) :

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = C^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}$$

où k_σ est le **vecteur d'onde**.

$\square \tilde{h}^{\mu\nu} = 0$ devient alors :

$$\boldsymbol{k^\alpha k_\alpha = 0}$$

Donc pour être solution de l'équation d'Einstein linéarisée, le vecteur de l'onde plane doit être de type lumière. Cela revient à peu près à dire que **les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse de la lumière**.

D'autre part, la jauge de Lorenz permet d'écrire que :
$k_\mu C^{\mu\nu} = 0$
Donc l'onde gravitationnelle est **transverse**.

Cela donne 4 nouvelles contraintes sur nos coefficients. Il en reste 6 indéterminés... Mais plus pour longtemps. Choisissons une direction pour la propagation, disons les z, et hop, déjà 4 autres de parties.

Et enfin, en imposant une trace nulle, nous voilà bien ! Et pourquoi une trace nulle ? Lors de l'établissement des équations d'Einstein, on a vu qu'un espace vide d'énergie ($T^{\mu\nu} = 0$) entraînait la nullité de la courbure scalaire et du tenseur de Ricci. Heureusement pour ce qui nous intéresse ici, ça ne veut pas dire que l'espace est sans courbure, mais que celle-ci se cache, à coup sûr, en dehors de la diagonale.
Si on veut que notre perturbation se propage dans le vide, c'est donc naturel de la supposer sans trace.

Remarque :

Il en est de même pour la source de ces ondes ; ce sont les termes non diagonaux du tenseur énergie-impulsion qui peuvent les créer. **Les radiations gravitationnelles sont donc des ondes de cisaillement**. Les termes de pression, s'ils ne s'annulent pas, doivent être asymétriques puisque ça revient à avoir des termes de cisaillement non nuls. En effet, écraser dans une direction et étirer dans la direction perpendiculaire est équivalent à un cisaillement à 45° de ces 2 directions.

Autre remarque :

Au final, on a affiné notre jauge avec la condition de non-trace ; on est maintenant dans la **jauge TT** (**transverse traceless gauge**), sous-jauge de la jauge harmonique.

À quoi ressemble finalement notre onde maintenant qu'on a circonscrit sa forme ?

Le tenseur $C_{\mu\nu}$ a cette tête :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{+} & C^{\times} & 0 \\ 0 & C^{\times} & -C^{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien une symétrie quadrupolaire et les deux coefficients C_+ et $C_\times$ correspondent aux deux polarisations + et × que peuvent prendre ces ondes comme on va le voir.

Considérons dans un plan transverse à la direction de propagation de l'onde (z = cte) deux particules séparées sur l'axe des x d'une distance dx. La distance les séparant va évoluer lors du passage de l'onde comme :

$$\Delta l = \int \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = \int \sqrt{g_{xx}} dx \approx 1 + \frac{1}{2} h_{xx}$$

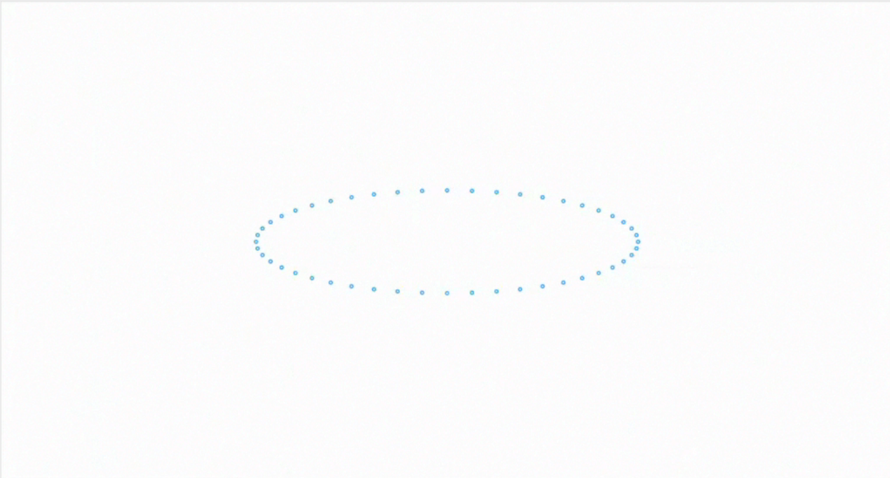
soit $\Delta l = \approx 1 + \frac{1}{2} C_+ \cos(\omega t)$

Et de même, pour deux particules séparées de dy, on obtient :

$$\Delta l = \approx 1 - \frac{1}{2} C_+ \cos(\omega t)$$

puisque C_{yy} = -C_+

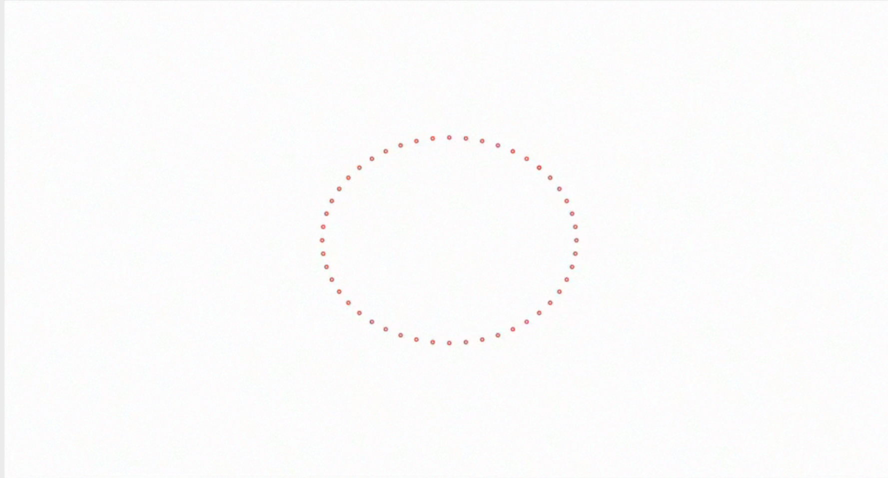
Donc pendant que les x sont étirés, les y sont contractés et puis ça s'inverse... On peut représenter ainsi l'effet de l'onde sur un ensemble de masses tests disposées en cercle sur un plan transverse.



Polarisation +

On comprend mieux le nom de polarisation +. Et on constate que **l'effet de l'onde est celui d'une force de marée**. C'est naturel puisque l'onde gravitationnelle n'est qu'un gradient gravitationnel variant dans le temps, et une force de marée n'est elle-même rien d'autre qu'un gradient gravitationnel.

Ça, c'était pour les C_+... Et les $C_\times$ alors ? Facile, c'est la même chose tournée à 45°.



Polarisation ×

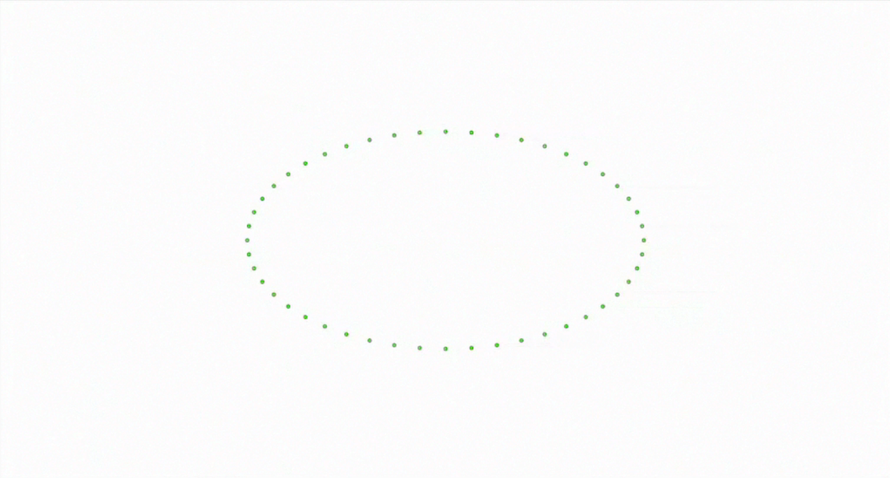
Ce sont les deux modes indépendants de polarisation linéaire des ondes gravitationnelles.

On peut aussi transformer nos deux modes perpendiculaires + et × en des polarisations circulaires vers la droite ou vers la gauche en les combinant :

$$C_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ + iC_\times)$$

$$C_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ - iC_\times)$$

Remarquons que les particules ne voyagent pas sur l'anneau, mais ne font que dessiner des petits cercles.



Polarisations R et L.

Dans chaque cas que le mode est **invariant par rotation de 180°**, ce qui va avec la nature quadripolaire et le **spin 2** de ces ondes.

Ce qui marche avec des petites masses flottant dans l'espace marche en réalité avec n'importe quel corps solide ou liquide, car comparée à la rigidité de l'espace, celle de la matière est plutôt ridicule.
Cela a amené des projets de détection reposant d'abord sur les résonances que les ondes gravitationnelles pourraient faire naître dans des barres métalliques, jusqu'ici sans succès, puis à d'immense dispositifs interférentiels en croix tentant d'atteindre une précision suffisante pour la détection d'effets spectaculairement infimes comme on va le voir.

Première chose, reconnectons les ondes à leur source, l'énergie :

$$\Box \tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

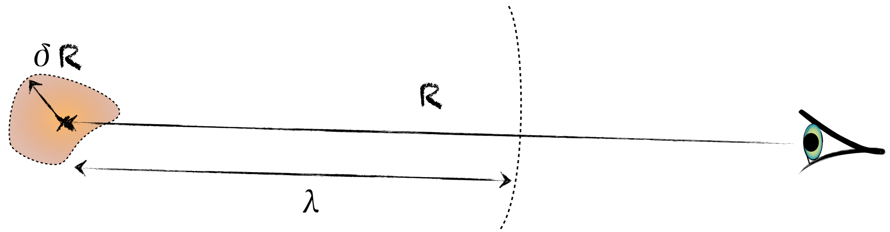
Équation analogue à celle de l'électrodynamique relativiste où $\tilde{h}$ joue donc le rôle de A :
$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu$

Et comme pour l'électrodynamique, la solution prend la forme d'un potentiel retardé (on utilise les fonctions de Green pour y arriver) :

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3y \, \frac{T_{\mu\nu}(t', \vec{y})}{|x - y|}$$

où $t' \equiv t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$.

Avec :



- $x \equiv R \gg \delta R$, où δR détermine l'étendue de la source (intervalle de variation de y) = on se place loin par rapport à l'étendue de la source.
  Cela permet d'écrire : $1/|x\text{-}y| \approx 1/R$

- $\lambda \gg \delta R$, c'est l'hypothèse de mouvement lent, c'est-à-dire que les vitesses internes dans la distribution de masse sont petites devant c. Pour un mouvement oscillant, ça correspond bien à $v \approx \delta R\omega \ll c$, donc $\lambda \gg \delta R$.
  Cela permet d'écrire : $t\text{-}y/c = t\text{-}R/c$

On obtient :
$$\tilde{h}_{\mu\nu}(t,R) = \frac{4G}{Rc^4}\int d^3y\, T_{\mu\nu}(t - R/c, \overrightarrow{y})$$
S'ensuivent deux, trois tours de passe-passe avant que n'apparaisse glorieusement :

$$\tilde{h}_{mn}(t,R) \approx \frac{G}{c^4}\frac{\ddot{Q}_{mn}}{r}$$

où les points sur la tête désignent les dérivées temporelles et où $Q_{\mu\nu}$ est le moment quadrupolaire de la distribution de masse : $Q_{mn} = \int \rho x_m x_n\, d^3x$

On a donc retrouvé notre prévision de départ, ouf… **L'amplitude de l'onde dépend bien de l'accélération (oscillation) du moment quadrupolaire de la distribution de charge** et on a même précisé les choses.

Les tours de passe-passe :

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(t,R) = \frac{4G}{Rc^4}\int d^3y\, T_{\mu\nu}(t - R/c, \overrightarrow{y})$$
déjà, on n'a besoin que de la partie spatiale. En effet, la jauge de Lorenz nous permet d'écrire :
$\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu}(t,R) = 0$, et donc $\partial_0 \tilde{h}^{0\nu} = \partial_i \tilde{h}^{i\nu}$ ce qui donne, en passant dans l'espace de Fourier (rappelons que h oscille) :
$$\tilde{h}^{0\nu} = \frac{i}{\omega}\partial_i \tilde{h}^{i\nu}.$$
Donc pas de problème pour retrouver la partie temporelle une fois qu'on a la spatiale.

on va donc commencer par :
$$\tilde{h}^{mn}(t,R) = \frac{4G}{Rc^4}\int d^3y\, T^{mn}(t - R/c, \overrightarrow{y})$$
on intègre par partie
$$\int T^{mn} d^3y = \int \partial_k (x^m T^{kn})\, d^3y - \int x^m(\partial_k T^{kn})\, d^3y$$
Le premier terme est nul puisque la source est circonscrite et $-\partial_k T^{kn} = \partial_0 T^{0n}$ par conservation de $T^{\mu\nu}$.
$$\int T^{mn} d^3y = \int x^m(\partial_0 T^{0n})\, d^3y = \partial_0\left[\int x^m T^{0n}\, d^3y\right]$$
et retour pour un tour :
$$\begin{aligned}\int x^m T^{0n}\, d^3y &= \int \partial_k (x^m x^n T^{0k})\, d^3y - \tfrac{1}{2}\int x^m x^n(\partial_k T^{0k})\, d^3y \\ &= \tfrac{1}{2}\partial_0^2\left[\int x^m x^n T^{00}\, d^3y\right]\end{aligned}$$
Et T^{00} vaut en première approximation ρ (là, on passe sous silence «l'auto-induction» de l'onde sur la source qui modifie sa densité d'énergie).

G/c^4, c'est riquiqui ! D'où la galère pour détecter des ondes gravitationnelles ; il nous faut des sources bien lourdes et qui gigotent vite. Les systèmes binaires d'étoiles à neutron ou de trous noirs sont bien des candidats sympathiques… mais si éloignés qu'on se retrouve avec une amplitude h de l'ordre de 10^{-20}, et avec de la chance encore. Comme h est le morceau de métrique qui fait la variation par rapport à un espace plat, ça donne au niveau du détecteur :

$$\frac{\Delta L}{L} \approx h$$

où ΔL est l'allongement ou le raccourcissement dû au passage de l'onde.
Et on se retrouve à devoir mesurer des variations relatives de longueur de l'ordre de 10^{-20}… Et encore s'agit-il de sources très puissantes et rares.

Petit calcul d'ordre de grandeur pour le système Terre-Lune :
$Q \sim mR^2$, m est la masse réduite, soit quasiment la masse lunaire dans ce cas, et R vaut à peu près la distance Terre-Lune.
$\ddot{Q} \sim \omega^2 mR^2$ et par la 3ème loi de Newton $M\omega^2R=GM^2/(2R^2)$ où M, somme des 2 masses vaut quasiment la masse terrestre.
On trouve donc :

$$h \sim \frac{M_T M_L G^2}{R_{T-L} d c^4}$$

Si on regarde depuis Mars à seulement 100 millions de km, on sera amené à détecter des amplitudes d'environ 10^{-26} ! Bon courage.

La première idée pour obtenir une telle précision fut d'utiliser la résonance d'une barre métallique ; il suffit d'attendre qu'une onde de la bonne fréquence daigne venir résonner.
Bien sûr, on isole la barre des vibrations terrestre, on la met dans un frigo, on la couple avec un système amplificateur, etc.
Il y a de ces barres un peu partout et on a rendu hommage à leur papa en les nommant barre de Weber.
Jusque là, elles sont restées silencieuses… mais aux aguets (dès qu'une étoile assez proche explose, c'est pour elles).

Autre idée : utiliser des interféromètres lasers (Michelson) avec des très grands bras. Un grand L permet de rendre ΔL plus accessible. Les deux principaux sont l'américain LIGO (bras de 4 km) et l'européen Virgo (3 km). Il ne leur reste plus qu'à détecter une variation d'environ 10^{-17} m…
Pour faciliter les choses, des projets d'interféromètres spatiaux comme LISA attendent leur financement.

Ces détecteurs doivent permettre une **observation directe** des ondes gravitationnelles, mais font jusqu'à maintenant chou blanc.
On pourrait même finir par douter de leur existence par une nuit sans lune, mais non, rassurez-vous, il y a bien eu détection, mais **indirecte** pour le coup. Bien qu'indirecte, sa précision en fait l'un des tests les plus forts de la relativité générale et a récompensé d'un prix Nobel ceux qui l'ont permis : Russell Alan Hulse et Joseph Hooton Taylor. Raison officielle : «la découverte d'un nouveau type de pulsar, une découverte qui a ouvert de nouvelles possibilités pour l'étude de la gravitation» (prix Nobel 1993).
Mais avant d'évoquer ce triomphe, il faut parler de l'énergie rayonnée.

Évidemment que les ondes gravitationnelles transportent de l'énergie puisqu'elles courbent l'espace ! Et donc fatalement, la **distribution de masse perd de l'énergie par émission radiative**.
Par analogie avec l'électrodynamique, **la puissance rayonnée doit dépendre du carré de la dérivée temporelle de l'amplitude du champ**, en valeur moyenne.

Remarque :
C'est un résultat tout à fait général. C'est le cas, entre autres, du vecteur de Poynting électromagnétique (en fonction du potentiel vecteur A).
Plus généralement, si $T_{\mu\nu}$ est l'énergie du champ, alors l'énergie totale sur une surface Σ de temps constant (= boule 3D) s'écrit :
$$E = \int_{\Sigma} T_{00}\, d^3x$$
Et pour le flux d'énergie rayonnée (puissance par unité de surface), on intègre du T_{om}.
Or, le $T_{\mu\nu}$ d'un champ est toujours quadratique en dérivées premières de l'amplitude du champ. Remarquons que c'est effectivement ce qu'on a trouvé pour l'énergie d'un champ scalaire dans le chapitre précédent !
Grossièrement, un champ lie une contrainte à une déformation. La contrainte correspond à un gradient de la déformation et la puissance est classiquement vue comme le scalaire formé par le produit du taux de déformation (vitesse) par la contrainte (force). Finalement, on a bien une forme quadratique entre deux dérivées premières (une spatiale et une temporelle). Ajoutons à cela que pour des oscillations harmoniques, dérivées spatiales et temporelles sont proportionnelles. Rien de choquant alors à avoir une puissance rayonnée qui va dépendre du carré de la dérivée temporelle de l'amplitude du champ.

On a donc
$$\frac{dE}{dt} \propto < \frac{dh^{ij}}{dt}\frac{dh_{ij}}{dt} >$$

L'énergie perdue par l'émission d'ondes gravitationnelles vaut alors :

$$\frac{dE}{dt} \approx -\frac{G}{c^5} < \dddot{Q}^{ij}\dddot{Q}_{ij} >$$

C'est la **formule du rayonnement dipolaire d'Einstein** dévoilée en 1918.

Jouons un peu avec les unités pour obtenir un ordre de grandeur. On peut déjà renverser le ridicule G/c^5 en injectant le rayon de Schwarzschild $R_S = 2GM/c^2$, rayon minimal pour une boule de masse M donnée (c'est le rayon d'un trou noir dont on reparlera plus loin).
Comme $\dddot{Q} \sim \omega^3 mR^2$,
$$\frac{dE}{dt} \sim -G/c^5 \times \omega^6 m^2 R^4 = -c^5/G \times (R_S/R)^2 \times (v/c)^2$$
où $v \sim \omega R$ est la vitesse caractéristique de la distribution de masse.

c^5/G est maintenant un monstre d'environ 10^{52} Watts. Sans surprise, pour s'en rapprocher, il faut des **sources le plus dense possible** ($R \rightarrow R_S$) et des **vitesses internes énormes** ($v \rightarrow c$).

Avec le système Terre-Lune, si loin de ces canons, un petit microwatt seulement est dissipé… Vraiment peanuts, surtout quand on sait que les marées dissipent à elles seules environ 3 térawatts ! Avec le système Terre-Soleil, on monte à une centaine de watts emportée par les ondes gravitationnelles, toujours pas terrible. Mais passons aux choses sérieuses avec un **système binaire d'étoiles à neutrons**, chacune d'environ une masse solaire, séparées par 10 secondes lumière : on arrive alors à 10^{32} W, beaucoup plus que le rayonnement électromagnétique du soleil (10^{26} W) !

Ce n'est pas anodin de dissiper autant d'énergie, ça freine. Et que se passe-t-il si on freine quelque chose en orbite (exercice classique de taupin) ? Il se rapproche et accélère (il tombe quoi). Les deux astres vont alors spiraler l'un vers l'autre de plus en plus vite et l'énergie rayonnée n'en devient que plus phénoménale. La phase finale de **coalescence** de tels systèmes représente d'ailleurs un des grands espoirs de source d'ondes gravitationnelles détectable.

C'est là qu'on en revient à **Hulse et Taylor**. Ils ont découvert le premier système binaire d'étoiles à neutron, baptisé d'un joli PSR B1913+16, dont l'une des deux est aussi un **pulsar**. Or le pulsar, véritable phare sidéral, est un astre très précieux pour le physicien puisqu'il envoie avec une régularité extrême une salve d'ondes radio à chaque rotation (qu'il a rapide : 59 ms pour le nôtre). Et ce signal permet de tout savoir : période, vitesse radiale par rapport à nous, taille de l'orbite et son excentricité, donc les masses.

Comment un signal rythmique donne-t-il accès à tout ça ?

• l'effet Doppler va altérer le rythme de réception au cours de la révolution suivant que le pulsar se rapproche ou s'éloigne → on a la **période** ;

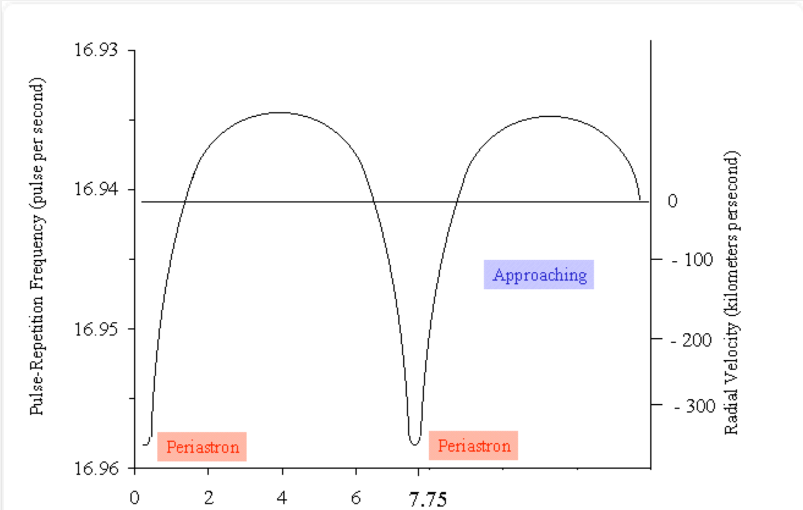
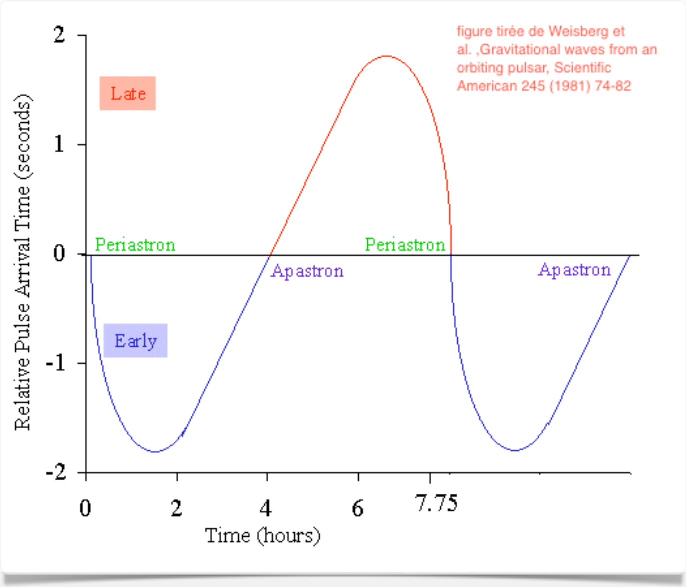


figure tirée de Weisberg et al. ,Gravitational waves from an orbiting pulsar, Scientific American 245 (1981) 74-82

• toujours grâce à l'effet Doppler, on obtient la **vitesse** radiale du pulsar (par rapport à la terre), comme le ferait un radar sur la route ;

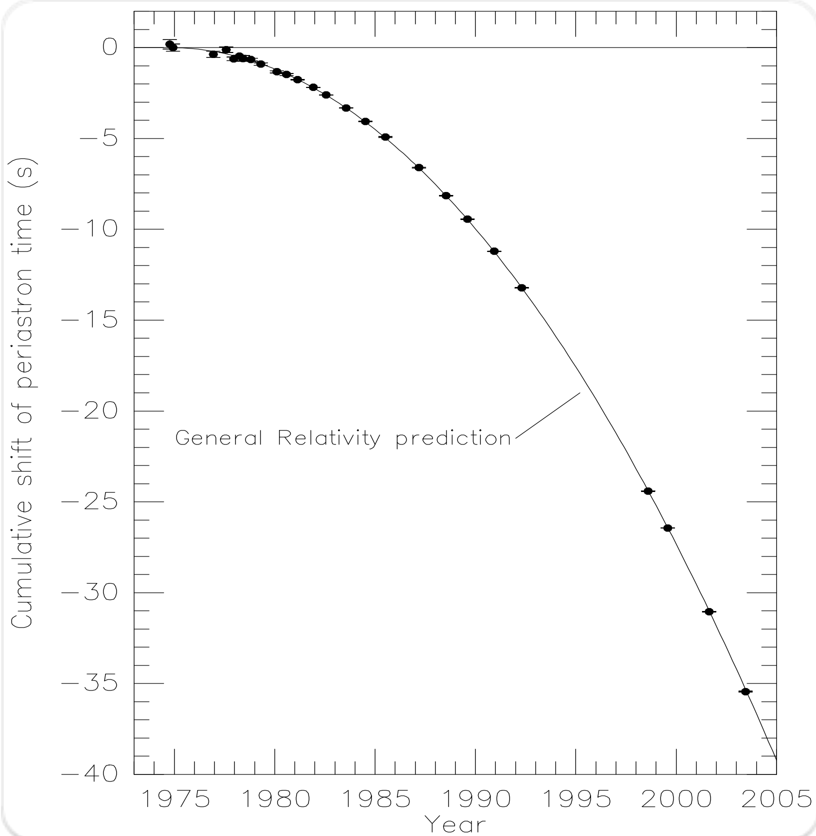
• la différence entre quantité de signaux décalés vers le bleu et quantité décalés vers le rouge nous donne l'**excentricité** ;

• les temps d'arrivée des signaux vont varier périodiquement suivant que l'émetteur est plus proche ou éloigné de la terre → on a l'**orbite**.



On peut donc faire le calcul de l'énergie emportée par les ondes gravitationnelles et en conclure théoriquement le taux de diminution de la période de révolution, chose aisément mesurable.

La figure suivante montre les données compilées en 2004 par Taylor et Weisberg (Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis) et qui s'étendent sur presque 3 décennies. La période diminue donc bien, mais ce qui frappe le plus est l'**accord entre les données et la théorie 0,2%** ! Et encore, cette incertitude est dominée par l'imprécision sur la vitesse du centre de la galaxie...



C'est quoi cette histoire de «shift of periastron» ?

Le décalage de la période due à la radiation d'ondes gravitationnelles est minuscule, 76 millionièmes de seconde par an ! Cela reste mesurable, mais l'astuce du périastre rend les choses bien plus spectaculaires, et améliore donc l'incertitude.

En effet, le périastre est le point de l'orbite du pulsar le plus proche de l'étoile à neutron et quand la période est modifiée et que les étoiles se rapprochent, l'orbite est reconfigurée et le périastre évolue non linéairement avec le temps.

Au premier ordre en t, la phase de l'orbite varie comme :
$\phi(t) \approx 2\pi f_0 t + \pi \dot{f} t^2$ où f_0 correspond à $f(t=0)$, fréquence mesurée au début des mesures.
Comme $\dot{f}$ est très faible, le développement est très bon !
Or le pulsar atteint le périastre au temps t_p tel que :
$\phi(t_p) = 2\pi N$
Par conséquent, l'instant t_p du périastre se décale en :
$t_p - \frac{N}{f_0} = t_p - t_p(t=0) \approx -\frac{1}{2}\frac{\dot{f}}{f_0} {t_p}^2$
Et cette augmentation en carré du temps permet d'arriver à des décalages conséquents.
Comme $\frac{\dot{f}}{f_0} = -\frac{\dot{T}}{T_0}$ et en prenant $\dot{T}$=76.10^{-6} s et T_0 = 7,75 h
On obtient bien, au bout de 30 ans, un décalage négatif (une avance) d'environ 40 s !

On pourrait aussi se demander si, cerise sur le gâteau, le système binaire ne pourrait pas s'approcher bientôt de la phase de spiralage finale pour devenir détectable. Mais là, va falloir être patient... À raison de 3,5 m par an, il va falloir attendre 300 millions d'années.

Et dernière question, pas mal hors sujet : comment se fait-il que la lune s'éloigne, elle ?

Certes le système Terre-Lune dissipe pas mal d'énergie (surtout la Terre dans ses océans), mais une petite partie de cette énergie des marées, au lieu de se perdre, est transférée de la rotation propre de la Terre (qui ralentit) à la révolution de la Lune (qui s'écarte). Les forces de marée agissent comme une force de rappel qui synchronise les rotations des astres.

SECTION 6

Constante cosmologique

On a mis jusque là sous le tapis une ambiguïté dans la définition du tenseur d'Einstein. En effet, on a vu que pour le construire, on a eu besoin d'un ingrédient (la métrique) et d'une contrainte (conservation covariante du tenseur). Or, on aurait pu construire un autre tenseur avec le même ingrédient et respectant la contrainte : $g^{\mu\nu}$ (puisque $\nabla_\mu g^{\mu\nu}=0$).

Donc, on peut généraliser les résultats précédents en prenant en compte notre nouveau terme :

$$G^{\mu\nu} + \lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

λ est appelée **constante cosmologique**.

Bon d'accord, le terme marche dans les équations, mais a-t-il un sens physique ? Et si oui quel est-il ?

Pour répondre, on va regarder l'analogue newtonien de la constante cosmologique.

Sans s'occuper des signes ni des facteurs numériques, on a :

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &\rightarrow \nabla^2\phi \\ \lambda g^{\mu\nu} &\rightarrow \lambda \\ \kappa T^{\mu\nu} &\rightarrow \rho g \end{aligned}$$

donc en newtonien :

$$\nabla^2\phi + \lambda = \rho g$$

Sans source, on a :

$$\nabla^2\phi = -\lambda$$

la constante cosmologique représente donc une densité uniforme de masse dans tout l'espace.

Une solution pour Φ serait :

$$-\frac{\lambda}{6}[x^2 + y^2 + z^2]$$

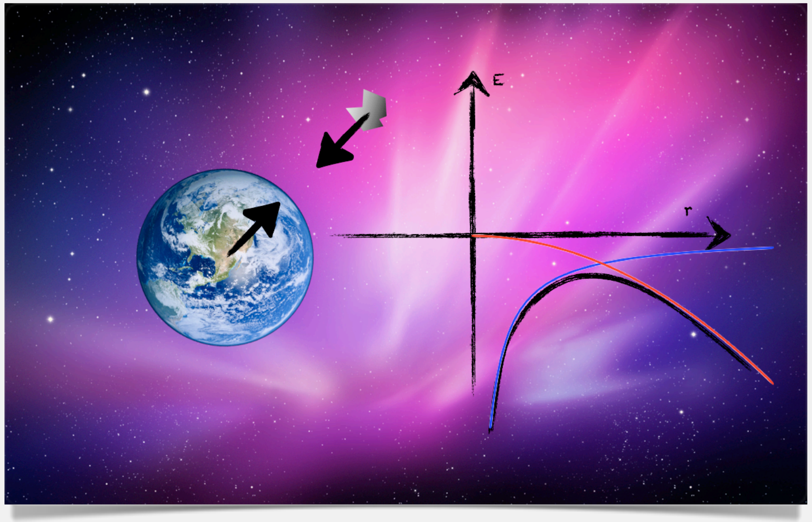
Et la force en découlant (dans la direction x par exemple) :

$$F_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\lambda}{3}x$$

Conclusion : tout dans l'univers est écarté ou rapproché (suivant le signe de λ) avec une force proportionnelle à la distance.

On peut penser à $\lambda g^{\mu\nu}$ comme une partie du tenseur énergie-impulsion (en le mettant de l'autre côté de l'équation), une partie toujours là même quand il n'y a pas d'énergie ni d'impulsion = une énergie du vide ! λ agit en effet comme une pression du vide.

Remarques :



- la constante cosmologique peut aussi bien se trouver du côté géométrie que du côté source.

- λ n'est pas une erreur d'Einstein dans le sens où son existence est aujourd'hui avérée, mais c'est une erreur d'Einstein par rapport au rôle qu'il voulait lui faire jouer. Après l'avoir découvert dans les solutions possibles de son équation, il s'en est servi pour empêcher l'univers de s'écrouler sur lui-même dans l'hypothèse où l'univers serait stationnaire (il ne voulait pas croire en son expansion). Mais l'équilibre atteint alors est instable ! Pour le montrer, considérons un rocher à une certaine distance de la terre. L'énergie d'attraction gravitationnelle est une hyperbole dans le quadrant r>0, E<0 (en bleu ci-contre) et la répulsion liée à la constante cosmologique est une parabole dans le même secteur en prenant λ répulsif (en rouge ci-contre). On peut bien obtenir un équilibre entre rocher et terre, mais on voit bien qu'il est instable. Et en extrapolant à l'univers...

Expérimentalement, grâce à l'observation de supernovas lointaines, on sait aujourd'hui que la constante cosmologique n'est pas nulle (la mesure date de 1998 et a valu le prix Nobel en 2011 à Saul Perlmutter, Brian Schmidt, et Adam Riess). Et elle est répulsive, mais si faible que son action ne devient significative que pour des distances... cosmologiques.