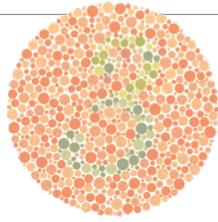
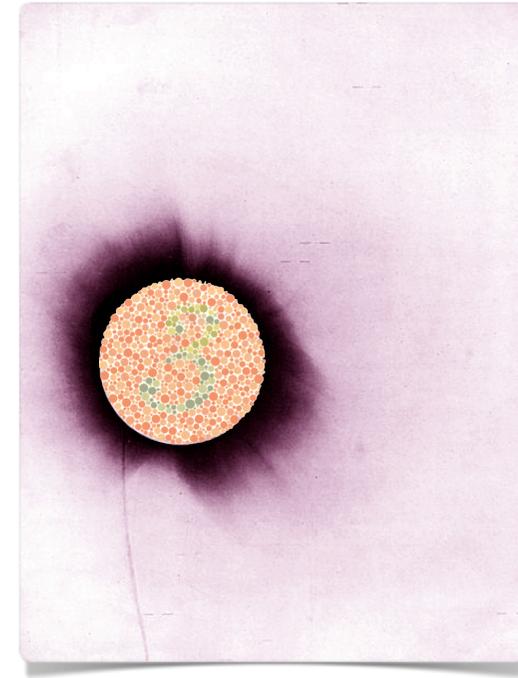


Les tests



PLAN

- Avance du périhélie de Mercure
- Déviation de la lumière
- Rougissement gravitationnel



En publiant la théorie de la relativité générale, Einstein s'est occupé des chipoteurs. Oui, ok, une théorie, si jolie soit elle, doit pouvoir être invalidée expérimentalement... Il a donc proposé trois tests : l'un est plus l'élucidation d'une observation inexplicquée qu'un véritable test (le périhélie de Mercure), les deux autres furent jetés en pâture aux expérimentateurs chevronnés.

Avance du périhélie de Mercure

Un astre comme Mercure ne parcourt pas éternellement la même ellipse. D'une année à l'autre, l'axe de l'ellipse tourne un peu. On le constate en mesurant, d'une rotation à l'autre de Mercure, la légère avancée de son périhélie. Les autres planètes sont en grande majorité responsables de ce léger décalage par perturbation de l'orbite immobile de départ. Mais voilà, le calcul classique ne rend pas compte de l'ensemble de l'avance du périhélie de Mercure. Il manque 43'' d'arc par siècle. C'est pas des masses, mais c'est mesuré, c'est inexplicable et donc ça interroge.

Le problème est toujours ouvert en 1915 jusqu'à ce qu'Einstein arrive avec les 43'' dans sa poche...

Commençons par parler orbites en relativité générale. Ou plutôt qu'orbite, tellement 19^{ème} siècle, on devrait dire

géodésique de type temps. Et comme on a en bonne approximation affaire à des astres sphériques et éternels, on va chercher les géodésiques de type temps dans la métrique de **Schwarzschild**. Or un mouvement général trimballe 4 inconnues, $t(\tau)$, $R(\tau)$, $\theta(\tau)$, $\Phi(\tau)$, il nous faut donc au moins 4 équations...

Fin de l'insoutenable suspense, en voilà 5 (la troisième compte pour deux) :

$$\begin{aligned} (1 - 2GM/R) \frac{dt}{d\tau} &= \text{const} \equiv E \\ R^2 \frac{d\phi}{d\tau} &= \text{const} \equiv L \\ \theta &= \pi/2 \\ \frac{1}{2} \dot{R}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) \frac{L^2}{2R^2} - \frac{GM}{R} &= \frac{E^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

On obtient ces 4 équations assez facilement en utilisant les **vecteurs de Killing** (voir la [petite section](#) sur ces charmants objets). En effet, le grand degré de symétrie de la métrique de Schwarzschild aide pas mal...

Chaque invariance est associée à un vecteur de Killing, ça en donne 4 :

- 3 pour la symétrie sphérique
- 1 pour la symétrie de translation dans le temps.

Et comme on l'a vu, à chaque vecteur de Killing ξ^μ est associée une constante du mouvement $\xi_\mu u^\mu$.

En espace plat, la symétrie temporelle entraîne la conservation de l'énergie et la symétrie sphérique entraîne la

conservation du moment cinétique qu'on peut voir comme un vecteur spatial.

4 quantités sont alors conservées : l'énergie (1 quantité), la longueur du vecteur moment cinétique (1 quantité) et sa direction (2 quantités).

De la même manière, on aura chez Schwarzschild conservation d'une énergie et d'un moment cinétique (valeur et direction). Pour la direction, ça nous dit que la particule ne sortira pas d'un plan donné. Il n'y a plus qu'à choisir... Disons le plan équatorial $\theta = \pi/2$ pour simplifier les expressions.

Les 2 vecteurs de Killing restant sont l'amplitude du moment cinétique et l'énergie :

- L'énergie émerge du vecteur de Killing de type temps

$$\xi_1 = \partial_t :$$

$$\xi_{1\mu} = \left(\left(1 - \frac{2GM}{R} \right), 0, 0, 0 \right)$$

ce qui amène comme constante :

$$\left(1 - \frac{2GM}{R} \right) \frac{dt}{d\tau} = \text{const} \equiv E$$

- Et l'amplitude du moment cinétique correspond à $\xi_2 = \partial_\phi$:

$$\xi_{2\mu} = (0, 0, 0, R^2 \sin^2 \theta)$$

Comme on a choisi $\theta = \pi/2$, $\sin^2 \theta = 1$, et finalement :

$$R^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \text{const} \equiv L$$

Enfin, une dernière constante du mouvement se cache dans le module de la vitesse (scalaire) d'un objet massif (de type

temps) :

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2 \quad (\text{on continuera de prendre } c=1 \text{ dans la suite)}$$

ce qui se traduit en :

$$\left(1 - \frac{2GM}{R} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{R} \right)^{-1} \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 - R^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 1$$

Et en faisant apparaître nos constantes :

$$E^2 - \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{R} \right) \left(\frac{L^2}{R^2} + 1 \right) = 0$$

On peut encore jouer un peu et donner à cette équation une forme familière pour qui a déjà joué avec les mouvements à force centrale :

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{R} \right) \frac{L^2}{2R^2} - \frac{GM}{R} = \frac{E^2 - 1}{2}$$

Quelques questions avant d'analyser la solution :

- Est-ce que la constante qu'on a appelée énergie correspond bien à une énergie ?

En se rappelant que $E = p^0 = mu^0 = m dt/d\tau$, on vérifie qu'à grande distance, notre terme tend bien vers l'énergie (par unité de masse).

- Pourquoi se retrouve-t-on avec un terme en E^2 dans la dernière expression ?

Précisons d'abord qu'en rétablissant c , le deuxième terme de l'équation en question s'écrit :

$$\frac{E^2 - c^4}{2c^2}$$

On vient de voir que E s'interprète comme l'énergie de la particule par unité de masse mesurée par un observateur statique distant du corps central. On a donc :

$$E \equiv \frac{mc^2 + E_0}{m} = c^2 + \frac{E_0}{m}$$

où E_0 est l'énergie mécanique de la particule (on n'a qu'elle dans la limite Newtonienne puisque pas de terme de masse).

Et finalement :

$$\frac{E^2 - c^4}{2c^2} = \frac{E_0}{m} \left(1 + \frac{E_0}{2mc^2} \right)$$

qui n'est plus que E_0/m pour $E_0/mc^2 \ll 1$. Tout va bien.

Passons aux choses sérieuses...

Sur le modèle de l'analyse des mouvements à force centrale, on peut introduire un **potentiel effectif** V_{eff} :

$$V_{eff}(R) \equiv -\frac{GM}{R} + \frac{L^2}{2R^2} - \frac{GML^2}{R^3}$$

Il permet de simplifier l'équation du mouvement radial :

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + V_{eff}(R) = \frac{E^2 - 1}{2}$$

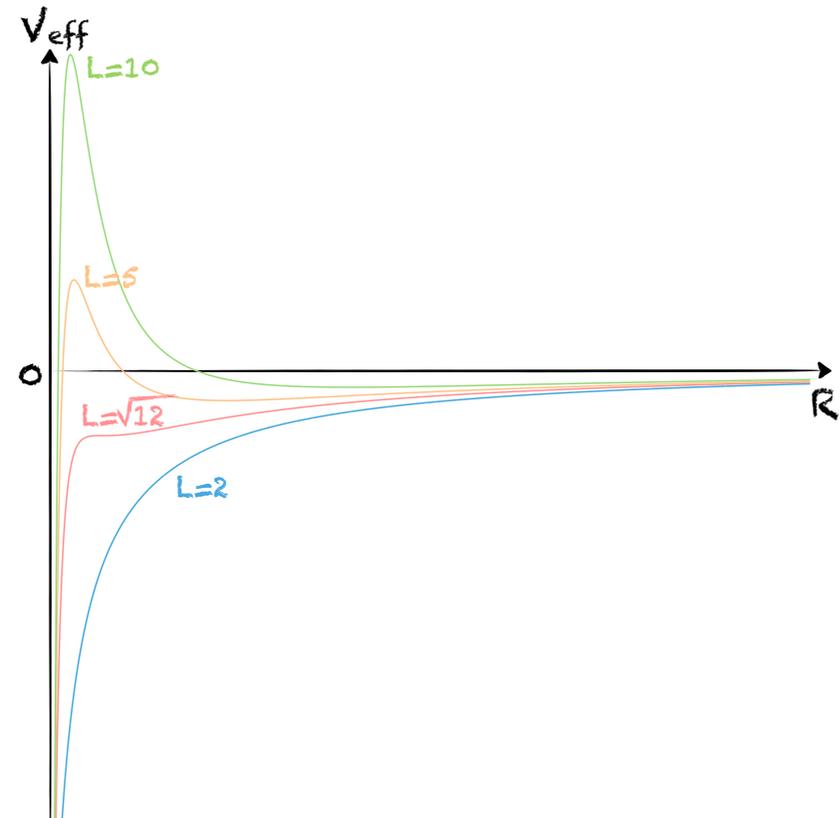
Cela se réduit bien, dans la limite newtonienne, en :

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + V_{eff}^{Newt}(R) = E_0$$

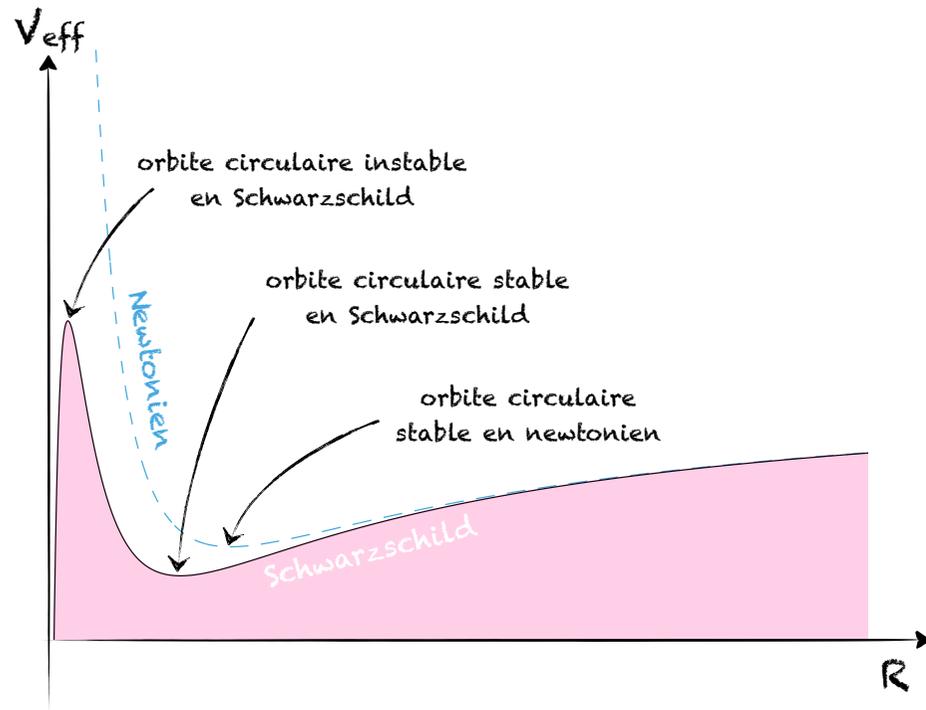
$$\text{avec } V_{eff}^{Newt}(R) \equiv -\frac{GM}{R} + \frac{L^2}{2R^2}$$

Alors qu'en newtonien, on se retrouve avec une barrière centrifuge infranchissable ($V \rightarrow \infty$ quand $R \rightarrow 0$) et un minimum de potentiel correspondant à des orbites closes, la correction relativiste change pas mal la donne !

En effet, elle bascule la limite de V_{eff} en $-\infty$, la barrière centrifuge devient donc franchissable. Et suivant la valeur de L , il peut ne pas y avoir d'extremum local (pour les petits L), ou il peut y en avoir deux (pour les grands L), un stable, l'autre instable . La frontière est en $L = \sqrt{12}GM$.



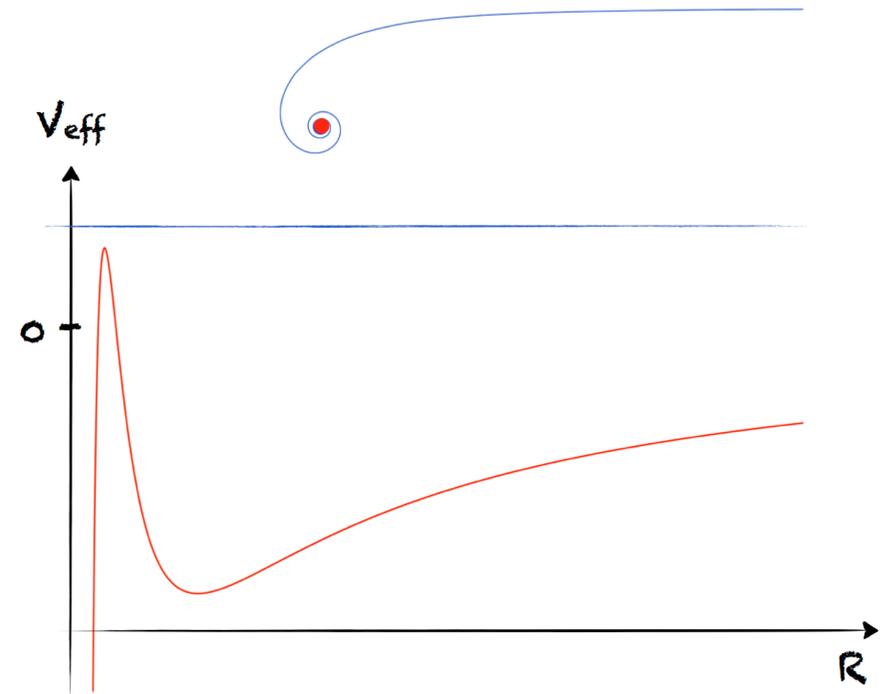
Dans tous les cas, et c'est heureux, V_{eff} tend vers zéro à grande distance.



Ici, on s'intéresse plutôt au cas des orbites elliptiques. Elles correspondent à un piégeage de la particule avec oscillation entre deux valeurs de R , le périégée et l'apogée.

Dans le doux monde newtonien, cette oscillation coïncide parfaitement avec un tour de cadran de l'angle Φ . Mais ce n'était qu'un heureux hasard qui n'a plus cours en relativité générale !

GALERIE 5.1 Énergies et trajectoires correspondantes



Si l'énergie $(E^2-1)/2$ dépasse la valeur maximum de V_{eff} , la particule va spiraler vers le centre de la distribution de masse.

Pour s'en convaincre, dérivons d'abord l'équation du mouvement radial :

$$\dot{R}\ddot{R} + \frac{dV_{eff}}{dR}\dot{R} = 0$$

Et donc pour $\dot{R} \neq 0$:

$$\ddot{R} = -\frac{dV_{eff}}{dR}$$

D'autre part, en utilisant $R^2\dot{\phi} = L$, on tire :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{L}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

D'où :

$$\ddot{R} = \frac{L}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{L}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right)$$

En passant de R à $u=1/R$, et en notant par un prime les dérivées par rapport à Φ ($u'=-R'/R^2$),

$$\ddot{R} = -\frac{dV_{eff}}{dR} \text{ devient :}$$

$$-L^2 u^2 u'' = -GMu^2 + L^2 u^3 - 3GML^2 u^4$$

Dans le cas newtonien, nous aurions obtenu :

$$-L^2 u^2 u'' = -GMu^2 + L^2 u^3 \Rightarrow u'' + u = \frac{GM}{L^2}$$

qui se résout en :

$$u(\phi) = \frac{GM}{L^2} (1 - e \cos(\phi))$$

ce qui donne de jolies ellipses pour $R(\Phi)$...

On aurait aussi pu montrer, mais c'est plus fastidieux, que la variation de Φ entre le périégée et l'apogée vaut π .

En relativité générale, le terme supplémentaire complique les choses...

On va truquer en ne s'occupant que d'orbites faiblement excentriques. Le potentiel $V_{eff}(u)$ est alors près de son minimum local (correspondant aux orbites circulaires).

Et comme près d'un minimum, tout potentiel est approximativement quadratique, on se retrouve à nouveau avec un $u(\Phi)$ harmonique. Mais un $u(\Phi)$ oscillant n'implique pas nécessairement d'orbite close. Tout dépend en effet de la pulsation ! Or la trouver est un jeu d'enfant pour un potentiel quadratique : son carré est donné par la dérivée seconde de $V_{eff}(u)$ en son minimum.

Première chose : où se trouve le minimum de $V(u)$?

Les extrema sont en :

$$u_{\pm} = \frac{1}{6GM} \left(1 \pm \sqrt{1 - 12 \frac{G^2 M^2}{L^2}} \right)$$

et le minimum correspond au plus grand R , donc à u_- .

Ne reste plus qu'à évaluer la dérivée seconde du potentiel en

u_- :

$$\frac{d^2 V(u_-)}{du^2} = L^2 - 6GML^2 u_- = \sqrt{1 - 12 \frac{G^2 M^2}{L^2}}$$

Ce qui donne pour la pulsation :

$$\omega = \left(1 - 12 \frac{G^2 M^2}{L^2} \right)^{1/4} \approx 1 - 3 \frac{G^2 M^2}{L^2}$$

(on justifiera à la fin ce développement limité)

Comme ω est plus petit que 1, **quand l'angle azimutal atteint 2π , l'oscillation radiale n'est pas tout à fait complète.**

Repérons un point de l'orbite elliptique, le périhélie par exemple. Pour le retrouver au tour d'après, il faut un angle Φ tel que :

$$\omega\Phi = 2\pi$$

$$\text{et donc } \Phi = 2\pi + \delta \text{ avec } \delta = 6\pi \frac{G^2 M^2}{L^2}$$

Le périhélie a avancé !

On peut réécrire le décalage plus simplement :

$$\delta = 3\pi \frac{R_s}{R}$$

avec R , le rayon moyen de l'orbite.

En effet,

$$L = \sqrt{(1 - e^2)GM(R_a + R_p)/2}$$

Et le rayon moyen vaut :

$$R = (1 - e^2)(R_a + R_p)/2$$

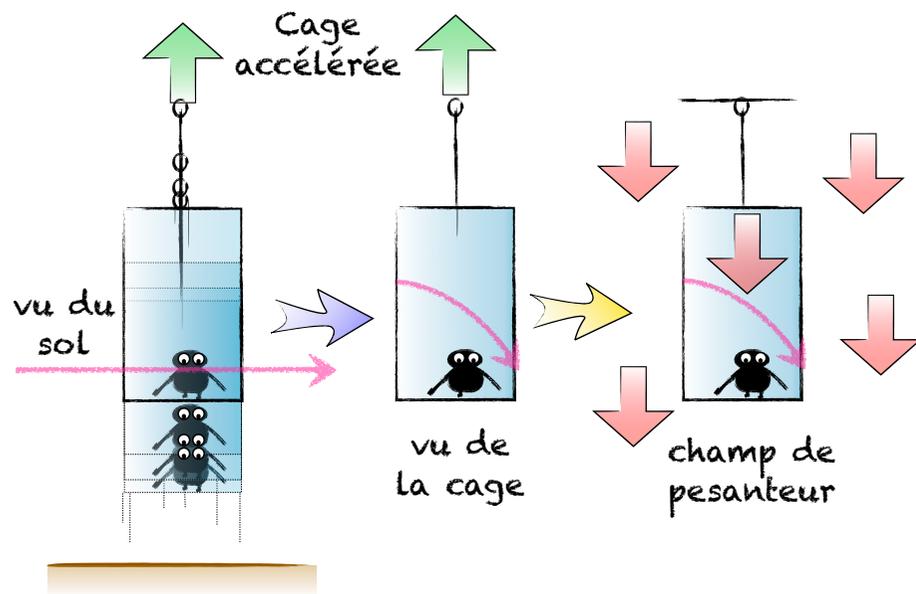
On peut vérifier avec les données sur Mercure que l'excentricité est plutôt faible ($\approx 0,2$), ce qui justifie notre approche (ouf !) et enfin calculer l'avance du périhélie pour

tomber sur les 43 secondes d'arc par siècle attendues (très faible valeur qui rend légal le développement limité de ω opéré plus haut).

Si c'est pas merveilleux...

Déviations des rayons lumineux et lentilles gravitationnelles

Dans un espace-temps courbe, les géodésiques et donc la trajectoire de la lumière sont... courbées. Par conséquent, on s'attend à des phénomènes de **mirages gravitationnels** dus à ces trajets non droits.



Il suffit d'appliquer notre sacrosaint principe d'équivalence pour se convaincre que les rayons lumineux seront courbés par la gravitation, puisqu'ils le sont pour un observateur accéléré.

Ou on peut remarquer que la déviation des rayons lumineux due à une source d'énergie associée au principe d'invariance de la vitesse de la lumière permet de retrouver le concept de courbure de l'espace-temps par l'énergie. En effet, la lumière ne peut être déviée et garder une vitesse constante (penser à l'optique géométrique où la déviation par un dioptre repose sur la différence apparente de vitesse de propagation de la lumière entre l'air et le dioptre, cette différence ne faisant que traduire l'effet global des diffusions par les électrons du dioptre), c'est donc l'espace lui-même qui doit se courber pour donner l'illusion de la déviation.

Aparté : c'est d'ailleurs probablement l'influence gravitationnelle du photon qui a donné l'intuition de la relativité générale à Einstein.

Agir sur une boîte de masse m contenant un photon revient à agir sur une boîte de masse m' un peu supérieure à m à cause de la quantité de mouvement du photon (il va cogner plus fort sur la paroi de la boîte dans le sens opposé à la mise en mouvement, ce qui se calcule rapidement avec l'effet Doppler). Or par le principe d'équivalence, l'action gravitationnelle sur cette boîte doit aussi se faire sur une masse m' (il ne doit pas y avoir de différence). La boîte garde donc du fait de la présence du photon une masse $m' > m$. Mais

réciroquement cette boîte agit gravitationnellement elle aussi. Donc le photon agit gravitationnellement (action de la différence de masse), donc **l'énergie gravite !**

Pour vérifier cette déviation des rayons lumineux, la première idée fut d'attendre la première éclipse et de regarder si les étoiles proches du soleil (alors observables) se trouvaient décalées.

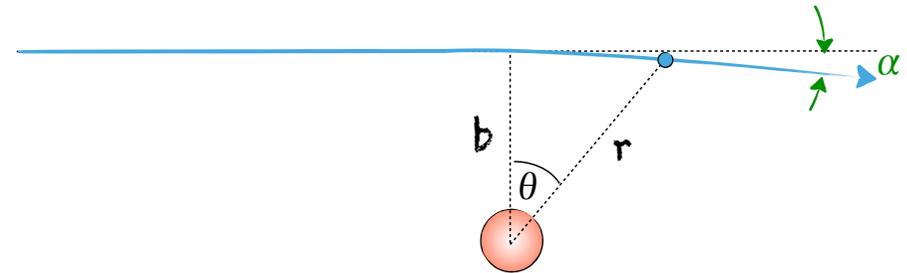
Et en 1919, Arthur Eddington mena l'expérience et confirma la théorie d'Einstein, lui apportant du jour au lendemain la gloire mondiale.

Les données d'Eddington étaient pourtant assez imprécises et les résultats de ces mesures aujourd'hui discutés. Mais quand bien même Eddington aurait trouvé un résultat négatif, Einstein déclarait «*Then I would feel sorry for the dear Lord. The theory is correct anyway*». Bref, pas de place pour l'échec, et les expériences menées par la suite n'ont pas joué de tours à l'insolent, loin de là !

On va tâcher nous aussi de faire des prédictions observables sur ces mirages et introduire les lentilles gravitationnelles.

Mais d'abord une petite surprise : la mécanique classique prédit, elle aussi, la déviation de la lumière par la gravitation ! Il suffit d'une théorie corpusculaire de la lumière (à la Newton) et de considérer le transfert de quantité de mouvement lors du passage près d'une masse...

On va dire qu'une particule passe très très vite (vitesse v) dans un champ newtonien (en inverse du carré de la distance) de façon à pouvoir modéliser approximativement sa trajectoire comme une ligne droite.



Le long de cette ligne, la particule de masse m reçoit une quantité de mouvement Δp entièrement dirigée sur l'axe perpendiculaire à la trajectoire (par symétrie) :

$$\Delta p = \frac{2GMm}{vb}$$

En effet :

$$\Delta p = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{GMm}{r^2} \cos(\theta) dt$$

et par conservation du moment cinétique (il reste valable pour les photons dans un espace courbe) :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const} = vb$$

$$\text{donc } dt = \frac{r^2}{vb} d\theta$$

on remplace et ça donne :

$$\Delta p = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{GMm}{vb} \cos(\theta) d\theta$$

Et donc, dans une théorie classique, l'impulsion tourne d'un angle :

$$\alpha = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2GM}{v^2 b}$$

Et en relativité générale alors ? Le résultat est pile-poil le double !

La métrique de Schwarzschild nous permet de définir une vitesse de la lumière $v=d/dt$ pour $d\tau=0$ différente de c car vue par un observateur lointain dans un espace-temps courbe (observateur pour lequel les R et t de Schwarzschild sont définis). Bien sûr, localement, la vitesse de la lumière est irrémédiablement c pour la bonne raison que localement, la métrique est plate.

Le petit problème, c'est que cette vitesse n'est pas isotrope (l'observateur lointain ne voit pas la lumière s'éloigner ou se rapprocher d'une masse aussi vite que filer orthogonalement, car c'est la direction radiale qui est pour lui dilatée par la masse). Mais on peut arranger ça et rendre les 3 directions spatiales équivalentes ; il suffit de prendre une coordonnée radiale alternative \bar{R} définie par :

$$R = \left(1 + \frac{R_s}{4\bar{R}}\right)^2 \bar{R}$$

\bar{R} se réduit à R pour $\bar{R} \gg R_s$ où R_s est le rayon de Schwarzschild.

On obtient alors la **métrique isotrope** :

$$d\tau^2 = - \left(\frac{1 - R_s/4\bar{R}}{1 + R_s/4\bar{R}} \right)^2 dt^2 + \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{R_s}{4\bar{R}}\right)^4 (d\bar{R}^2 + \bar{R}^2[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2])$$

(les parties radiales et orthogonales sont symétriques maintenant)

La vitesse de la lumière vue par l'observateur vaut ainsi :

$$v = c \frac{1 - R_s/4\bar{R}}{(1 + R_s/4\bar{R})^3}$$

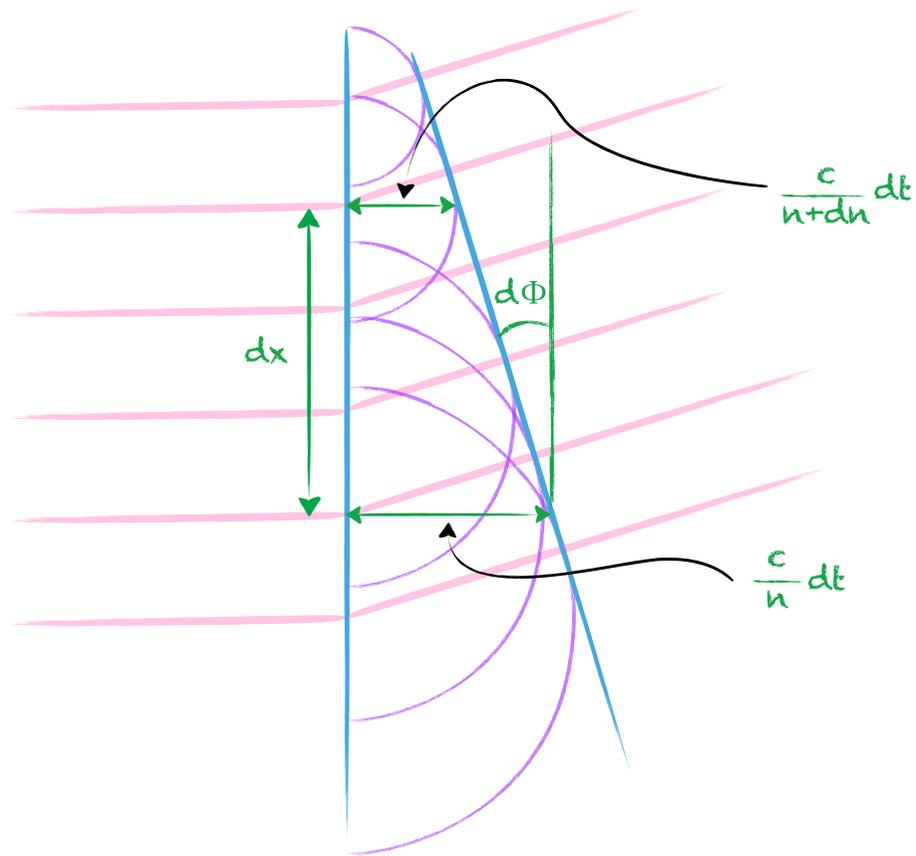
On peut alors faire une analogie avec les lois de la réfraction qui reposent aussi sur une variation apparente de la vitesse de la lumière dans le milieu traversé.

L'indice optique serait :

$$n \equiv \frac{c}{v} = \frac{(1 + R_s/4\bar{R})^3}{1 - R_s/4\bar{R}}$$

Et grâce à la construction de Huygens, on peut relier le gradient d'indice à l'angle de déviation des rayons lumineux :

$$d\phi \approx \left(\frac{c}{n} dt - \frac{c}{n + dn} dt \right) / dx \approx \frac{cdt}{n} \frac{dn}{n} \frac{1}{dx} \text{ pour } \frac{dn}{n} \ll 1$$



Les rayons lumineux se tournent donc vers les indices les plus grands (ainsi ils vont de l'air surchauffé au-dessus de la route à l'air plus dense se trouvant plus haut).

Seul $\nabla_{\perp} n$, le gradient de l'indice dans la direction perpendiculaire à la propagation, intervient au premier ordre (le gradient dans la direction de propagation n'apparaissant qu'à l'ordre 2).

En appelant dv_{\perp} la variation de vitesse perpendiculairement à la direction de propagation, on a aussi :

$$d\phi = \frac{dv_{\perp}}{v}$$

et donc :

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{c^2}{n^3} \nabla_{\perp} n$$

Revenons maintenant à la métrique isotrope.

On se place loin pour avoir $\bar{R} \gg R_s$ et $\bar{R} \approx R$.

Dans cette approximation :

$$n \approx (1 + R_s/4\bar{R})^4 \approx 1 + R_s/\bar{R}$$

Et R_s/R peut aussi s'écrire $-2\Phi/c^2$ où Φ est le potentiel newtonien $-GM/R$.

Et donc :

$$n \approx 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$$

En substituant plus haut, on obtient enfin :

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = -\frac{2}{n^3} \nabla_{\perp} \Phi \approx -2 \nabla \Phi$$

Le double de ce qu'on obtiendrait en classique (avec la deuxième loi de Newton) ! On n'a donc plus qu'à doubler ce qu'on a obtenu plus haut...

La lumière passant près d'une étoile dévie d'un angle :

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{2R_s}{b}$$

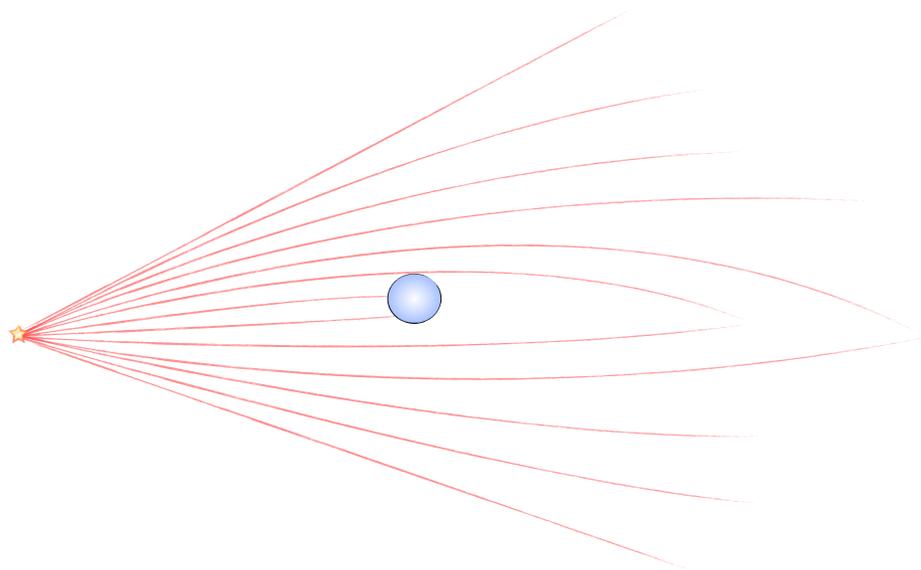
où b ($\gg R_s$) est le paramètre d'impact ou distance minimale d'approche.

Le facteur 2 vient de la prise en compte de la courbure de l'espace (terme devant la partie spatiale de la métrique) en plus de la courbure temporelle qui n'est que newtonienne. Un truc bougeant lentement dans un champ faible n'a que faire de la courbure de l'espace puisque sa ligne d'univers ne s'écarte quasiment pas de l'axe temporel du référentiel propre initial. À l'inverse, la lumière ne peut s'empêcher d'aller d'explorer la courbure spatiale en même temps que la temporelle.

Exemple : pour le **soleil**, en incidence rasante, ça donne :

$$\alpha = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} = 1,75'' \text{ d'arc}$$

Et c'est bien ce qu'on a vérifié depuis !

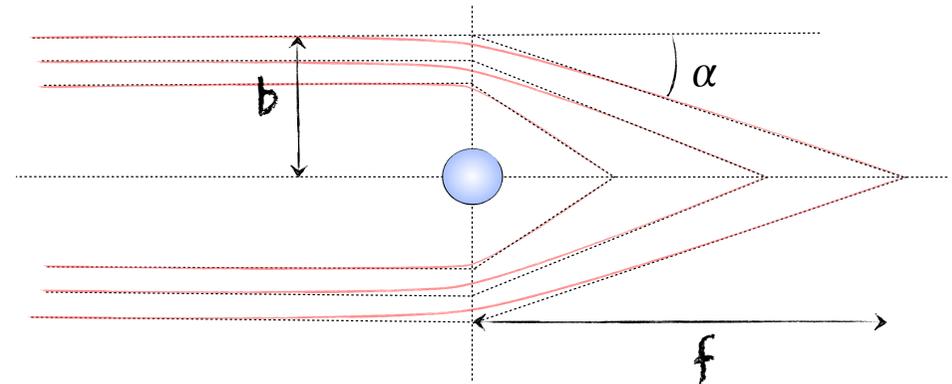


Du fait de la dépendance de l'angle de déviation en fonction du paramètre d'impact, une masse se transforme en une drôle de lentille convergente avec de fortes «aberrations sphériques».

En effet, il n'y aura pas un seul foyer, mais plusieurs, donnés par :

$$f \equiv \frac{b}{\alpha} = \frac{c^2 b^2}{4GM}$$

C'est plutôt sympa, car on ne contrôle pas vraiment la distance entre la source, la lentille et nous ; ça nous laisse un peu plus de chance.



En utilisant la relation de Descartes pour les lentilles minces : $1/d_1 + 1/d_2 = 1/f$ où d_1 et d_2 sont respectivement les distance source-lentille et lentille-image et en remplaçant f par l'égalité précédente, on trouve la valeur du paramètre d'impact b_E nous permettant de voir l'image d'une source en fonction des

deux distances d_1 et d_2 :

$$b_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_1 d_2}{(d_1 + d_2)}}$$

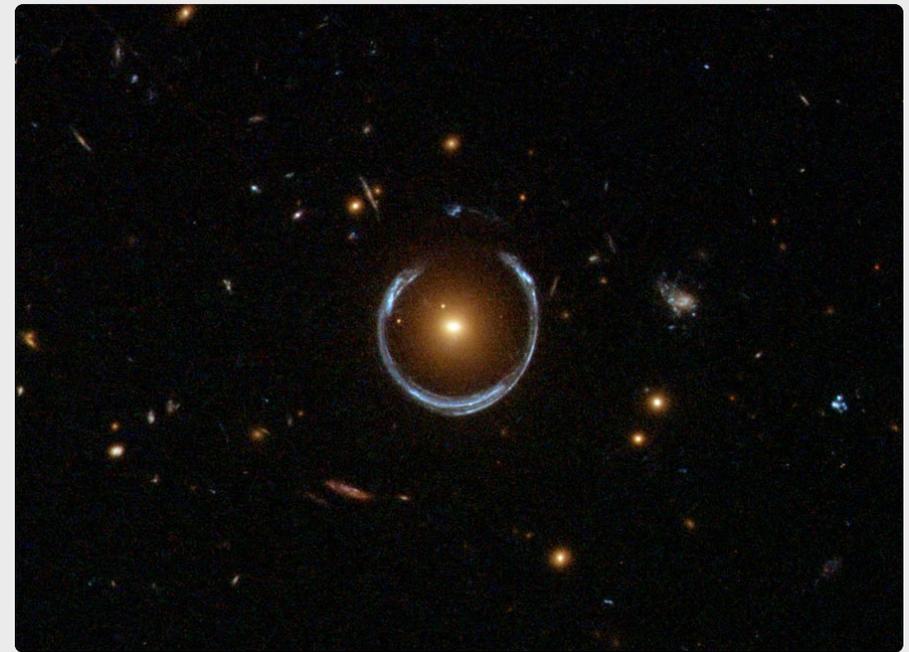
On l'appelle **rayon d'Einstein**

Pour un alignement parfait source-lentille-image, l'image observée prend donc la forme d'un **anneau** dit anneau d'Einstein, dont le rayon, vue de la masse lentille, vaut b_E .

Mais ça, c'est quand tout est parfait. Dans le cas général (non-alignement, lentille à la distribution étendue et/ou difforme) on obtient plutôt des images multiples plus ou moins étalées en arcs (cf [Galerie 5.2](#)).

Les lentilles gravitationnelles sont des outils exceptionnels pour sonder les distributions de masse qui créent les distorsions. C'est ainsi qu'elles ont permis d'en savoir plus (mais c'était pas dur) sur la matière noire ! Les distorsions créées par des amas de galaxies étaient en effet beaucoup trop importantes par rapport à la masse «visible» et on a pu de la sorte remonter à une distribution spatiale de la matière noire dans l'univers !

GALERIE 5.2 Images de mirages gravitationnels par Hubble



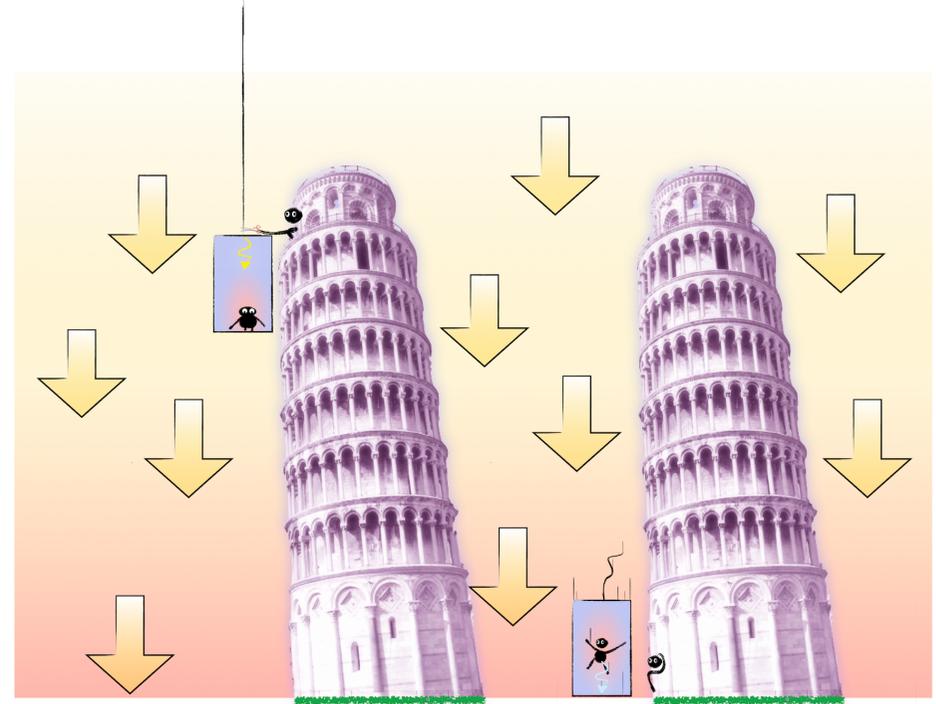
Le fer à cheval, anneau d'Einstein presque parfait ; une galaxie bleue vue à travers une galaxie rouge presque parfaitement alignée.



Rougisement gravitationnel

Le dernier test dit classique de la relativité générale, le **décalage gravitationnel vers le rouge**, proposé en 1916 par Einstein, fut le plus long à valider. Ça dit que la fréquence d'un rayonnement électromagnétique émis sous un certain champ gravitationnel (ou courbure de l'espace-temps) augmente si on l'observe dans un champ plus faible.

On va d'abord se convaincre de ce rougisement (ou bleuissement plutôt dans notre cas) avec une petite expérience de pensée. Puis on décrira la très jolie expérience de Robert **Pound** et son étudiant Glen **Rebka** qui leur permirent, en 1959, d'observer le phénomène. Enfin, on verra que le rougisement trouve en réalité son origine dans la dilatation gravitationnelle du temps qui aura elle aussi droit à de jolis tests. Voilà le programme.



Retournons du côté du **principe d'équivalence** pour apprivoiser ce décalage des fréquences (ou du temps selon le point de vue). Un ascenseur commence une chute libre dans un champ de pesanteur approximativement uniforme en face d'un observateur et la termine en bas de la tour devant un autre observateur. Au moment du départ, un photon de fréquence f_0 est émis depuis le plafond de la cabine et le passage devant le deuxième observateur correspond à l'arrivée du photon sur le sol de la cabine. La chute dure donc pour le passager $t_p = h/c + O(h^3)$ où h est la hauteur de la cabine.

C'est quoi ce $O(h^3)$?

Le principe d'équivalence n'est valable que localement, tant qu'on peut négliger les forces de marée.

Près de l'origine du mouvement, dans l'ascenseur, tout est plat et donc $d^2z/dt^2=0$. L'écart par rapport au plat naît de la variation du champ sur la distance qui nous occupe : h . La correction à notre accélération nulle est donc de l'ordre de h sur la distance caractéristique de variations du champ et après une double intégration, on arrive à une correction en h^3 . Il vaut mieux que h soit petit pour rester dans les clous du calcul...

- Pour le passager de l'ascenseur, le photon garde sa fréquence f_0 en vertu du principe d'équivalence.
- L'observateur du haut appartient au même référentiel au repos au moment du départ et voit donc alors aussi un photon de fréquence f_0 .
- L'observateur du bas, par contre, ne peut pas enregistrer la même fréquence que le passager ; tandis que ce dernier est immobile par rapport au photon, le spectateur du bas avance vers lui à une vitesse $v = gt_p = gh/c$ en première approximation. L'effet Doppler bleuit donc le photon et pour l'observateur, le décalage en fréquence est d'environ (pour une vitesse v non relativiste) :

$$f - f_0 \approx \frac{v}{c} f_0 = \frac{gh}{c^2} f_0$$

Si on inverse la situation en lançant la cabine vers le haut, on aboutira à la même observation : l'observateur situé en bas,

donc dans un potentiel gravitationnel plus fort, voit un photon plus bleu que l'observateur baigné d'un potentiel plus faible. La fréquence rougit dans un potentiel plus faible et bleuit dans un potentiel plus fort !

On parle communément de décalage gravitationnel vers le rouge, car on pense à la lumière des étoiles (potentiel fort) vue depuis la Terre (potentiel faible).

On retrouve fort heureusement la même chose à partir de la métrique de Schwarzschild !

τ correspond au temps du passager en chute libre dans le champ gravitationnel (donc aussi au photon) et t au temps d'un observateur immobile dans le champ. Le temps de l'observateur immobile est modifié par rapport au temps propre selon :

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= g_{00} dt^2 \\ dt &= d\tau \sqrt{(1 - 2GM/Rc^2)^{-1}} \\ &= d\tau (1 + GM/Rc^2) \end{aligned}$$

pour des distances $R \gg R_s$.

Et donc la fréquence qu'il voit variera à l'inverse :

$f = f_0(1 - GM/Rc^2)$ ce qui correspond bien à un rougissement.

Mais attendez, on n'est pas encore retombé sur le résultat précédent. Que cela ne tienne :

$$f - f_0 \approx \frac{gh}{c^2} f_0$$

Or $g = \nabla\Phi$ ($g > 0$) et pour ce petit h (on veut que les forces de marée soient négligeables) $\nabla\Phi h = d\Phi$.

De même, $f - f_0 = df$ et donc $df = f_0 d\Phi/c^2$

En intégrant entre R et $+\infty$ (où $f = f_0$) on obtient :

$$f_0 - f = 0 - f_0 \Phi(R)/c^2$$

et avec $\Phi(R) = -GM/R$, on retombe bien sur :

$$f = f_0(1 - GM/Rc^2)$$

Expérimentalement, on peut d'abord penser à tester le phénomène sur la lumière provenant du soleil. Le rougissement correspondant à la variation du potentiel gravitationnel entre la surface du soleil et celle de la Terre est d'environ $2 \cdot 10^{-6}$. Et ce décalage de 2 ppm sur une même transition observée sur Terre et depuis la lumière solaire serait aisément observable si le bruit ne noyait pas la mesure ! Quel bruit ? Il suffit d'une vitesse de 600 m/s pour avoir un décalage Doppler du même ordre de grandeur. Ce n'est pas un souci pour les vitesses relatives du Soleil et de la Terre, on les connaît.

L'agitation thermique est plus problématique, car à cette température (≈ 6000 K) les vitesses atomiques sont de l'ordre du km/s. Mais une nouvelle fois, on s'en sort bien puisque l'orientation de ces vitesses est aléatoire. Ça ne fait donc qu'élargir les raies et il suffit de récupérer assez de signal pour descendre le rapport signal/bruit en dessous des 2 ppm. Plus compromettant par contre, les courants de convection dans le plasma solaire viennent gâcher nos espoirs de vérification facile. On ne les connaît que trop mal et leurs vitesses sont suffisantes pour nous casser les pieds.

Pourquoi pas essayer sur Terre alors ? Certes, l'effet va être faible (très très faible) mais là au moins, tout est sous contrôle.

Mais bon... Sur 10 m, la variation relative du potentiel gravitationnel terrestre est de l'ordre de 10^{-15} , pas folichon. Fallait se montrer plutôt malin, et nos deux compères le sont grandement, pour domestiquer cette infime variation.

Découvrons leur ingénieux dispositif :

- Déjà, ils ont choisi une tour aux proprios peu regardants sur les trous dans le plafond. Les 22,5 m de la tour gauche du Jefferson Physical Laboratory à Harvard (qui a déjà abrité l'expérience de Hall au début du siècle sur les déviations Coriolis) feront l'affaire. La variation relative du potentiel gravitationnel est dans ce cas de **$2,5 \cdot 10^{-15}$** ...



- Ils ont ensuite cherché le photon idéal pour la mesure :
 - Il faut une grosse énergie pour que la variation de fréquence soit accessible ($df/df_0 = dE/dE_0 \approx 10^{-15}$). Quoi de mieux alors qu'une transition nucléaire ?

- Mais il faut aussi que la détermination de la fréquence soit la plus précise possible. On veut donc une raie d'émission fine, or d'après Heisenberg, cela va de pair avec une transition plutôt lente, donc un niveau d'énergie d'instabilité modérée (durée de vie longue). Mais cela pose problème : si on laisse un système vivre sa vie trop longtemps, il va fatalement interagir avec son environnement, ce qui peut le désaccorder...

La désexcitation du noyau de ^{57}Fe a alors semblé un bon compromis (la vraie raison de ce choix se trouve un peu plus loin). Après capture électronique, les noyaux de ^{57}Co se désintègrent en ^{57}Fe qui se désexcitent au final en émettant un beau γ de 14 keV.

On n'a plus qu'à utiliser du ^{57}Fe comme émetteur et d'en badigeonner au-dessus du récepteur (un scintillateur). Sans décalage gravitationnel, les photons émis seront absorbés avant d'entrer dans le récepteur. Si décalage il y a, par contre, le compteur doit s'affoler. Et pour déterminer ce décalage, les deux physiciens ont eu l'idée de monter l'émetteur sur un haut-parleur afin d'utiliser l'effet Doppler comme accordeur : quand le décalage **Doppler** compense le décalage gravitationnel (ce qui correspond à des vitesses de l'ordre de la dizaine de $\mu\text{m/s}$!), le comptage est minimum et il suffit donc de lier le compteur à la phase du haut-parleur (donnant la vitesse de la source) pour avoir notre réponse. Enfin ça, c'est la théorie. On verra qu'en pratique faut ruser un peu.

Mais attendez, **le recul** lors de l'émission du photon gamma, il ne désaccorde pas tout ?

Ben si... Le photon a une impulsion p de 14 keV/c et donc transfère au noyau de fer une énergie valant :

$$p^2/2m_{\text{Fe}} = p^2c^2/2m_{\text{Fe}}c^2 = 2.10^{-3} \text{ eV}$$

Et avec une largeur de raie environ 100 000 fois plus faible, ce recul ne pourrait que ruiner l'expérience en empêchant toute résonance...

Mais heureusement, Rudolf **Mössbauer** est passé par là ! À peine deux ans plus tôt, il découvrait l'effet qui porte son nom (et qui lui valut le prix Nobel en 61) : à une température suffisamment basse, le recul des atomes d'un cristal ne se fait pas isolément, c'est le cristal dans son ensemble qui recule.

Les vibrations des atomes du réseau sont cohérentes à ces basses températures et quantifiées en phonons. Et si les photons émis ou reçus sont suffisamment faiblards, l'énergie est insuffisante pour exciter le moindre phonon, donc le recul est intégralement transmis au mouvement de translation de l'ensemble du réseau !

Mais si l'énergie du photon est trop importante, des phonons sont émis, nos atomes vibrent et donc décalent la résonance. Le ^{57}Fe semble correspondre au meilleur compromis entre facilités expérimentales et proportion de γ émis ou absorbés sans recul. C'est leur réactivité et ce choix adroit qui a sans doute permis à Pound et Rebka de gagner la course de la première vérification du décalage gravitationnel des fréquences.

Ce n'est plus la masse d'un seul atome de fer qui intervient dans la formule du recul, mais celle de toute la partie cohérente de l'échantillon et il suffit donc d'un réseau de plus de 100 000 atomes pour que l'énergie perdue soit inférieure à la largeur naturelle de notre résonance !

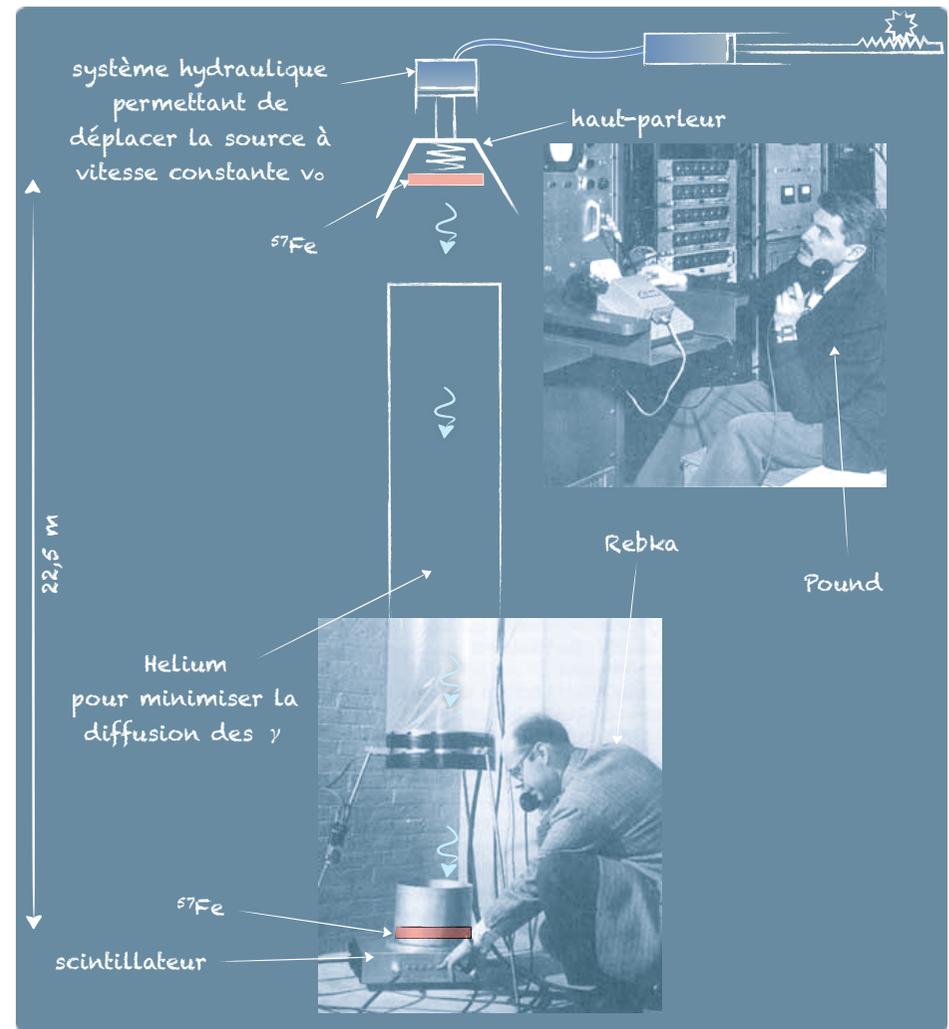
Maintenant que la question du recul est réglée, revenons à la largeur de la résonance.

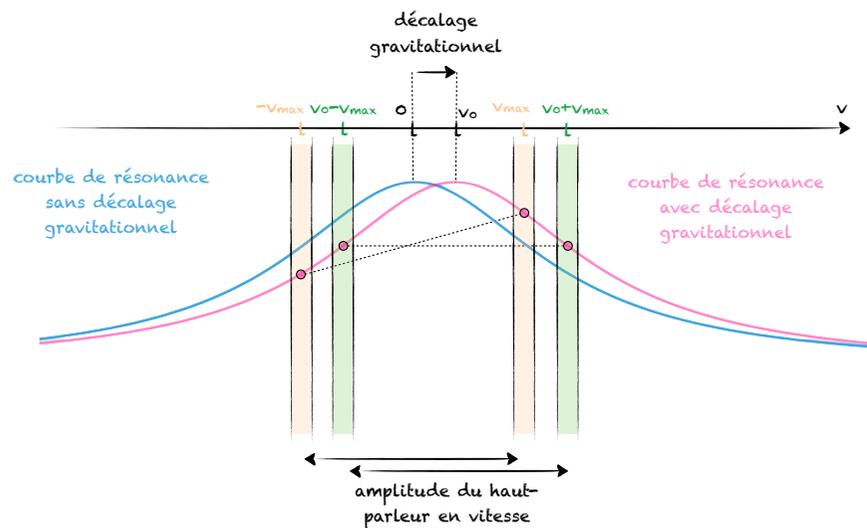
La durée de vie du niveau excité du ^{57}Fe vaut $\tau = 10^{-7}$ s, ce qui correspond à une largeur de raie $\Gamma \approx \hbar/\tau \approx 10^{-8}$ eV. Γ/E est alors de l'ordre de 10^{-12} soit environ 1000 fois plus grand que la variation relative de fréquence due à la gravité ! Comment ont-ils alors réussi à mesurer cet effet infime avec leur grosse patate ?

Chercher à minimiser le signal du compteur n'est plus vraiment une bonne idée : pour le trouver, on se déplace sur la partie plate de la patate, l'incertitude serait énorme. Pourquoi ne pas donner plutôt un peu plus d'amplitude à la vitesse du haut-parleur (plusieurs fois la taille du décalage gravitationnel cherché) ? On se décentrerait là où les pentes de la courbe de résonance sont plus raides et donc les variations plus nettes. On compterait alors les photons arrivant sur ces pentes, sur une petite plage de fréquence de part et d'autre du sommet. Du fait du décalage gravitationnel vers les hautes fréquences du pic de résonance, le comptage serait nécessairement asymétrique par rapport au passage par une vitesse nulle du haut-parleur (cf. le graphique un peu plus loin où tout a été très exagéré).

Il suffit ensuite d'ajouter au haut-parleur une vitesse de translation v_0 constante (vers le haut) qu'on ajuste progressivement jusqu'à avoir un décompte symétrique par rapport au zéro.

Plutôt que quêter un minimum très étalé, l'astuce est donc de compenser une asymétrie beaucoup plus franche.





Et pour éviter les erreurs systématiques, comme une différence de température entre le bas et le haut de la tour (1°C suffit à produire un effet de taille comparable à celui cherché), ils ont échangé plusieurs fois les positions de la source et du récepteur.

Finalement, ils ont trouvé un écart relatif en fréquence (donné par v_0/c) de $(2,56 \pm 0,25) \times 10^{-15}$, ce qui s'accorde plutôt très bien avec la prévision théorique. Et voilà ainsi le dernier test d'Einstein validé !

Pound, accompagné cette fois-ci de Snider, réussira même quelques années plus tard à descendre l'incertitude de 10% à 1% avec un dispositif semblable.

Mais comme on va le voir, et sans que cela ne retire rien au caractère historique de leur expérience, il ne s'agissait pas tout à fait d'un test de la relativité générale...

Pourquoi donc ces arguties ?

La lumière elle-même ne change pas de fréquence lors de sa propagation dans le champ, ce sont les horloges des observateurs situés en des potentiels différents qui battent différemment. L'effet réel sous-jacent est donc **la dilatation gravitationnelle du temps !**

On s'en convainc en retournant à l'expérience de pensée du départ : dans le référentiel de la cabine, le photon «doit» rester le même (principe d'équivalence), ce sont les observateurs en haut et en bas de la tour qui font des constatations différentes, lui n'a pas changé. Le rougissement n'est qu'une conséquence de la dilatation des temps qui touche des observateurs en des potentiels différents.

Plus le potentiel gravitationnel est fort, plus la courbure de l'espace-temps est grande, et plus le temps est dilaté ! En un point de l'espace, l'axe temporel n'est plus rectiligne, ce qui est bien synonyme de temps allongé puisque la ligne des temps est maintenant plus longue à parcourir...

Le rougissement, lui par contre, n'est qu'apparent. Et voilà pourquoi il ne s'agit pas à proprement parler d'un test de la relativité générale !

Certes, si le temps bat moins vite, on enregistrera plus de battements en un laps de temps donné et on conclura au

bleuissement de la fréquence par rapport à une fréquence mesurée avec un temps non dilaté. Mais ce bleuissement pourrait tout aussi bien être réel et violer ainsi le principe d'équivalence ! C'est donc la dilatation du temps elle-même qu'il faudrait tester directement pour valider cette partie de la théorie...

Sur le papier, c'est simple, il suffit d'enregistrer le tic-tac d'une montre en hauteur et comparer le rythme à la nôtre. Un tic-tac plus rapide et c'est gagné !

Lorsqu'on a retrouvé la formule du décalage en fréquence à partir de Schwarzschild (2^{ème} cadre grisé), c'est bien de la dilatation du temps dont on est parti :

$$d\tau^2 = g_{00} dt^2$$

$$dt = d\tau \sqrt{(1 - 2GM/Rc^2)^{-1}}$$

$$= d\tau(1 + GM/Rc^2) \text{ pour } R \ll R_S$$

$$= d\tau(1 - \phi(R)/c^2)$$

Le temps de l'observateur immobile dans le potentiel à la distance R bat plus lentement que l'observateur en chute libre, ou ce qui revient au même, immobile très loin du champ. Il bat aussi plus lentement que pour un observateur dans un potentiel plus faible ($d\tau(1 - \phi(R_1)/c^2) < d\tau(1 - \phi(R_2)/c^2)$ si $R_1 < R_2$).

Le potentiel gravitationnel (ie la courbure) dilate le temps !

Et c'est comme ça qu'en 1971, on fit prendre l'avion à une horloge atomique...

Joseph **Hafele** et Richard **Keating** ont en effet eu l'idée de comparer trois horloges atomiques (horloges dont l'oscillation est asservie sur une transition atomique bien précise), l'une ayant fait un tour du monde en avion vers l'Est, l'autre vers l'Ouest et la dernière n'ayant pas bougé.

Une fois réunies, ils ont constaté leur désaccord et vérifié qu'il correspondait aux prévisions d'Einstein.

Deux effets sont à prendre en compte et sont ainsi testés (on appellera τ et τ_0 les temps enregistrés respectivement par l'horloge voyageuse et l'horloge restée au sol) :

- la dilatation cinématique des temps due à la différence de vitesse entre les horloges : $\tau - \tau_0 = (1/\gamma - 1)\tau_0 \approx -\frac{v^2}{2c^2}\tau_0$
- la dilatation gravitationnelle des temps due à la différence de hauteur des horloges : $\tau - \tau_0 \approx \frac{gh}{c^2}\tau_0$

Et voilà ce qu'ils ont trouvé :

	horloge ayant voyagé vers l'Est	horloge ayant voyagé vers l'Ouest
décalage total (en ns) par rapport à l'horloge restée au sol	-40±23	275±21
dont décalage cinématique	-184±18	96±10

Dans le cas ultra simplifié d'un voyage le long de l'équateur et en ne retenant que les effets du premier ordre, on obtient quelque chose comme :

$$\tau - \tau_0 = [gh/c^2 - (2R_T\Omega_T v + v^2)/2c^2]\tau_0$$

où Ω_T est la vitesse angulaire de la Terre et R_T son rayon.

L'application numérique montre que le terme gravitationnel et le terme cinématique sont à peu près du même ordre de grandeur (v^2 négligeable) ce qui explique grossièrement les résultats : les deux termes se compensent pour un v positif, donc un voyage vers l'Est, et au contraire, ils se cumulent lors du voyage vers l'Ouest.

Et en prenant en compte les détails réels des deux voyages, les mesures correspondent aux prévisions théoriques avec une précision de 10%.

Cette expérience a été financée pour seulement 8000\$ et constitue donc un des tests les moins chers de la relativité générale (7600\$ des 8000\$ ont été dépensés dans les 8 billets d'avion nécessaires, incluant 2 places dans chaque avion pour «Mr. Clock»).

C'est aussi le premier test relativiste fait non pas avec des particules subatomiques mais avec de bonnes vieilles (quoique...) horloges, si chères à Einstein.



Remarque :

comme la surface de la Terre est approximativement une isopotentielle (en gravité apparente, c'est-à-dire prenant en compte l'accélération centrifuge), une horloge aux pôles ne mesurera pas le temps différemment qu'une horloge à l'équateur, les décalages gravitationnel et cinématique se compensant parfaitement ! Ce «non-test» avait pourtant été imaginé par Einstein lui-même pour mettre à l'épreuve la relativité restreinte. Mais c'était en 1905, avant qu'il ne s'autocorrige en s'occupant de la relativité générale...

Un peu plus tard, 1976, on envoya un maser à hydrogène (oscillateur extrêmement précis) dans une petite fusée en tir parabolique jusqu'à une altitude de 10000 km. C'est l'expérience **Gravity Probe A**.

Le maser contrôlait un signal radio transmis au sol où on le comparait à un autre maser après prise en compte du décalage Doppler. L'incertitude descendait ainsi à 0,01% !

Ce décalage gravitationnel n'est pas qu'une lubie de physicien. Un appareil aujourd'hui extrêmement utilisé verrait ses performances bien dégradées s'il ne le prenait pas en compte : le **GPS**. En effet, les satellites utilisés pour nous positionner embarquent des horloges atomiques dont la précision est capitale pour mesurer la durée de parcours du signal électromagnétique qu'ils nous envoient et donc les distances qui les séparent de nous.

Orbitant à quelque 20 000 km de la surface, le décalage gravitationnel l'emporte largement sur le décalage cinématique, provoquant une accélération du battement de l'horloge. Au bout d'une journée, l'avance prise se monte à 38 μ s par rapport aux horloges terrestres, ce qui correspond à des erreurs de localisation d'environ 10 km s'accumulant de jour en jour ! Pas vraiment négligeable...

Et l'ironie voulut que les ingénieurs en charge du lancement du premier satellite, en 1978, ne crussent pas en ces fadaïses de théoriciens. Jamais leur horloge ne se verrait notablement influencer par une hypothétique courbure de l'espace-temps...

Ça leur permit d'observer tout à loisir l'agaçant décalage de 38 μ s par jour et de valider de manière d'autant plus éclatante qu'à leur corps défendant la théorie d'Einstein.

Loin d'être totalement stupides, ils avaient embarqué avec leur horloge un accordeur pour ajuster le rythme le cas échéant, on n'est jamais trop prudent...

Leçon prise, les horloges des satellites suivants furent réglées avant départ sur une fréquence de 10,22999999543 MHz pour des horloges terrestres battant, elles, à 10,23 MHz.

